

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO – RÍO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PREGUNTAS DE PRÁCTICA SOBRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Instrucciones: *Muestre todo el trabajo para obtener crédito.*

Apellidos: _____ Nombre: _____
Núm. de estudiante: _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Lleve a cabo las conversiones siguientes:

(a) 1 revolución a grados.

(b) $10\sqrt{\pi}^\circ$ a radianes.

Solución.

$$\begin{aligned} 180 \text{ grados} &= \pi \text{ radianes} \\ \iff 1 \text{ grado} &= \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \\ \iff 10\sqrt{\pi} \text{ grados} &= \frac{\pi}{180} \cdot 10\sqrt{\pi} \text{ radianes} \\ &= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{18} \text{ radianes.} \end{aligned}$$

(c) $(\pi^2)^\circ$ a radianes.

(d) 10π radianes a grados.

Solución.

$$\begin{aligned} \pi \text{ radianes} &= 180 \text{ grados} \\ \iff 1 \text{ radián} &= \frac{180}{\pi} \text{ grados} \\ \iff 10\pi \text{ radianes} &= \frac{180}{\pi} \cdot 10\pi \text{ grados} \\ &= 1800 \text{ grados.} \end{aligned}$$

(e) 3 radianes a grados.

2. Sea x la medida de un ángulo en grados y $f(x)$ su medida en radianes. Halle:

(a) Una fórmula para $f(x)$.

Solución.

$$180 \text{ grados} = \pi \text{ radianes}$$

$$\iff 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

$$\iff x \text{ grados} = \frac{\pi}{180}x \text{ radianes.}$$

$$\text{Se sigue que } f(x) = \frac{\pi}{180}x.$$

(b) Una fórmula para $f^{-1}(y)$.

Solución.

$$y = \frac{\pi}{180}x$$

$$\iff x = \frac{180}{\pi}y.$$

$$\text{Por tanto } f^{-1}(y) = \frac{180}{\pi}y.$$

3. El precio de una pizza es proporcional a su área. Un sector de una pizza circular tiene un radio de 10 pulgadas y un ángulo central de 30° . Si cuesta \$1, ¿cuánto debe costar un sector de una pizza cuyo radio es de 20 pulgadas y su ángulo central es de 30° ?

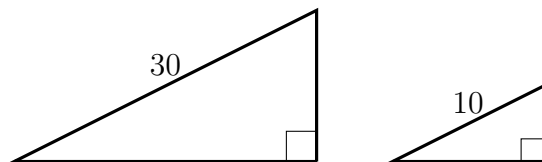
Solución. El área A de un sector de radio r y ángulo θ en radianes está dada por

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

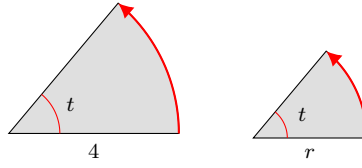
Si el radio se duplica y el ángulo se mantiene, el área aumenta por un factor de 4. Por tanto el precio debe ser \$4.

Observación: el área tiene dimensión L^2 . Cuando las dimensiones lineales se duplican, el área aumenta por un factor de 2^2 , independientemente de la forma.

4. El pequeño triángulo tiene una hipotenusa de 10 cm y un área de 4 cm^2 . El triángulo grande es similar al pequeño y tiene hipotenusa 30 cm. Encuentre el área del triángulo grande.



5. Halle el radio r del sector pequeño si el área del sector grande es 4 veces el área del sector pequeño.



Sean A_1 y A_2 las áreas de los sectores grande y pequeño, respectivamente.

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 t,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} r^2 t.$$

$$A_1 = 4A_2$$

$$\iff \frac{1}{2} \cdot 16 t = 2r^2 t$$

$$\iff r^2 = 4$$

$$\iff r = 2$$

(tomando $r > 0$).

6. Un arco de un círculo tiene un radio de 2 millas y un ángulo central de 30° . Halle la longitud del arco.

Solución. La longitud de arco s de un sector de radio r y ángulo θ en radianes está dada por $s = r\theta$.

$$180 \text{ grados} = \pi \text{ radianes}$$

$$\iff 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

$$\iff 30 \text{ grados} = \frac{\pi}{6} \text{ radianes.}$$

Por tanto

$$s = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ millas.}$$

7. En el círculo unitario, halle los puntos siguientes:

(a) $(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))$

(b) $P\left(\frac{31\pi}{6}\right)$

(c) $P\left(\frac{-31\pi}{6}\right)$

Solución. Recuerde que $P : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ (donde S^1 es el círculo unitario) satisface:

(a) $P(t \pm 2\pi) = P(t),$

(b) $P(t \pm \pi) = -P(t)$,

(c) $P(-t) = \overline{P(t)}$, donde $\overline{P(t)}$ denota la reflexión de $P(t)$ en el eje horizontal.

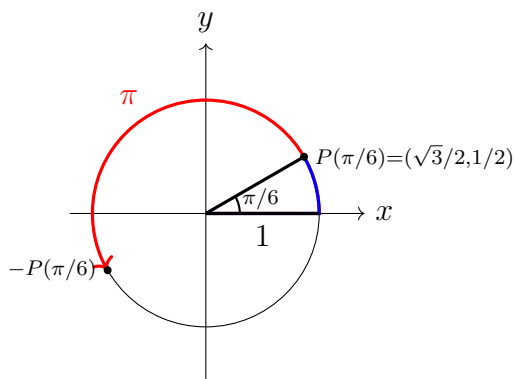
$$(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Usando (a) y (b):

$$\begin{aligned} P\left(\frac{31\pi}{6}\right) &= P\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = P\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = P\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Reflejando en el eje horizontal:

$$P\left(\frac{-31\pi}{6}\right) = \overline{P\left(\frac{31\pi}{6}\right)} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



8. Halle las coordenadas de los puntos siguientes en el círculo unitario:

(a) $P(-\pi/6)$

(b) $P(-\pi/4)$

(c) $P(-\pi/3)$

(d) $P(400\pi/3)$

(e) $P(-37\pi/4)$

Solución.

$$P\left(\frac{37\pi}{4}\right) = P\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) = P\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Tomando el conjugado,

$$P\left(-\frac{37\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(f) $\sin(123\pi/4)$

Solución.

$$P\left(\frac{123\pi}{4}\right) = P\left(30\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = P\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Por definición, $\sin \theta$ es la ordenada de $P(\theta)$. Así

$$\sin\left(\frac{123\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(g) $P(-123\pi/6)$

Solución.

$$P\left(\frac{123\pi}{6}\right) = P\left(20\pi + \frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1).$$

Tomando el conjugado,

$$P\left(-\frac{123\pi}{6}\right) = (0, -1).$$

(h) $\cot(123\pi/4)$

Solución. Como $P(123\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, se tiene $\cot(123\pi/4) = -1$.

(i) $\tan(12345\pi/4)$

Solución. $\frac{12345}{4} = \frac{12344}{4} + \frac{1}{4}$. Como $\frac{12344}{4}$ es entero y $\tan$ tiene periodo π ,

$$\tan\left(\frac{12345\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

9. Si la recta $y = mx$ es incidente al punto $P(\theta)$ y $\pi/2 < \theta < \pi$, halle (en términos de m):

(a) $\tan \theta$

(b) $\sin \theta$

Solución. La recta $y = mx$ pasa por $(0, 0)$ y por $P(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Por la fórmula de la pendiente,

$$m = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta.$$

Como $P(\theta)$ está en el círculo unitario,

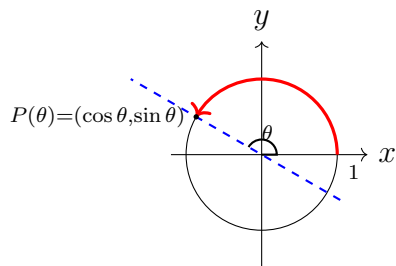
$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{m^2}{1 + m^2},$$

luego

$$|\sin \theta| = \frac{|m|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

En $\pi/2 < \theta < \pi$ se tiene $\sin \theta > 0$ y $m < 0$, por tanto

$$\sin \theta = -\frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}.$$



10. Si $\csc t = 7/2$ y $\pi/2 < t < \pi$, encuentre:

(a) $\sec t$

(b) $\sin t$

(c) $\tan t$

Solución.

$$\sin t = \frac{1}{\csc t} = \frac{2}{7}.$$

$$\sec^2 t = \frac{1}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{1 - 4/49} = \frac{49}{45} = \left(\frac{7}{\sqrt{45}}\right)^2.$$

En el segundo cuadrante la secante es negativa, luego

$$\sec t = -\frac{7}{\sqrt{45}}.$$

$$\tan^2 t = \frac{1}{\csc^2 t - 1} = \frac{1}{49/4 - 1} = \frac{4}{45} = \left(\frac{2}{\sqrt{45}}\right)^2.$$

En el segundo cuadrante la tangente es negativa, luego

$$\tan t = -\frac{2}{\sqrt{45}}.$$

11. Calcule el valor exacto de:

(a) $\sin(125\pi/3)$

(c) $\cos(1950^\circ)$

(e) $\tan(23\pi/3)$

(b) $\cos(-125\pi/3)$

(d) $\tan(\pi/4)$

12. Si la recta $y = -2x$ es incidente al punto $P(t)$ y $\pi/2 < t < \pi$, halle:

(a) $\sin t$

(b) $\cos t$

(c) $\tan t$

13. Si $\cos \gamma = -1/5$ y $\pi/2 < \gamma < \pi$, encuentre:

(a) $\sec \gamma$

(b) $\sin \gamma$

(c) $\cos \gamma$

Solución.

$$\sec \gamma = \frac{1}{\cos \gamma} = -5.$$

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}.$$

En el segundo cuadrante el seno es positivo, luego

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{24}}{5}.$$

(El valor de $\cos \gamma$ está dado: $\cos \gamma = -1/5$.)

14. Si $\tan t = -\sqrt{3}$ y $\cos t < 0$, halle $\sec t$.

15. El lado terminal de un ángulo t , en posición estándar, pasa por el punto $(-2, 5)$. Halle:

(a) $\sec t$

(b) $\csc t$

(c) $\cot t$

Solución. Sea $x = -2$, $y = 5$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{29}$.

$$\tan t = \frac{y}{x} = -\frac{5}{2}, \quad \sin t = \frac{y}{r} = \frac{5}{\sqrt{29}}, \quad \sec t = \frac{r}{x} = -\frac{\sqrt{29}}{2}.$$

16. Si $\cot x = -3$ y $\pi/2 < x < \pi$, halle:

(a) $\sin x$

(b) $\cos x$

(c) $\csc x$

17. Escriba $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$ en la forma $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ donde $r > 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$.

Solución.

$$\frac{1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

18. Si $F(\alpha) = \sin \alpha$ y $F(a) = 3/5$, halle:

(a) $F(-a)$.

(b) $F(a) + F(a+2\pi) + F(a+4\pi)$.

Solución.

Solución. Como F tiene periodo 2π ,

$$F(-a) = \sin(-a) = -\sin a = -F(a) = -\frac{3}{5}. F(a)+F(a+2\pi)+F(a+4\pi) = 3F(a) = \frac{9}{5}.$$

19. Para cada una de las funciones siguientes halle el periodo fundamental, la amplitud y los ceros. Dibuje un ciclo de la gráfica.

(a) $\sin 2t$

(d) $|\sin t|$

(g) $|\cos t|$

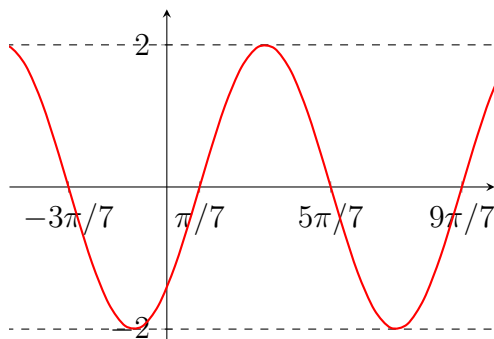
(b) $\sin(t/2)$

(e) $|\tan t|$

(c) $2 \sin t$

(f) $\cos |t|$

20. Halle valores positivos de A , b y c consistentes con la gráfica de abajo, cuya ecuación es $y = A \sin(bx - c)$. Explique.

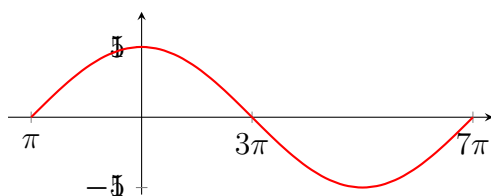


Solución. La gráfica tiene periodo $\frac{9\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{8\pi}{7}$ y amplitud 2. Esto es consistente con $y = 2 \sin x$ tras una contracción horizontal de factor $4/7$ y una traslación de $\pi/7$ a la derecha:

$$y = 2 \sin \frac{7}{4} \left(x - \frac{\pi}{7} \right) = 2 \sin \left(\frac{7}{4}x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Valores posibles: $A = 2$, $b = 7/4$, $c = \pi/4$.

21. Halle valores de A , ω y ϕ consistentes con la gráfica siguiente, cuya ecuación es $y = A \sin(\omega x - \phi)$. Explique.



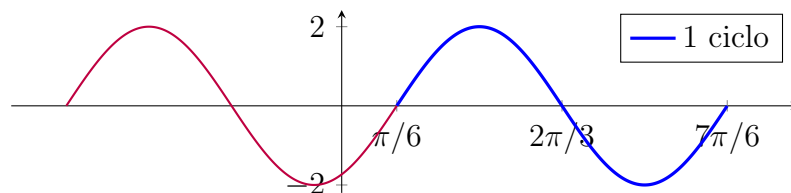
Solución. Amplitud $A = 5$, periodo $T = 8\pi$ y traslación π a la izquierda. Una ecuación posible es $y = 5 \sin\left[\frac{1}{4}(x + \pi)\right]$. Comparando con $y = A \sin(\omega x - \phi)$ se obtiene $A = 5$, $\omega = 1/4$, $\phi = -\pi/4$.

22. Halle el dominio, la imagen, el periodo fundamental, la amplitud y los ceros. Dibuje un ciclo de $f(x) = 2 \sin(2x - \pi/3)$.

Solución.

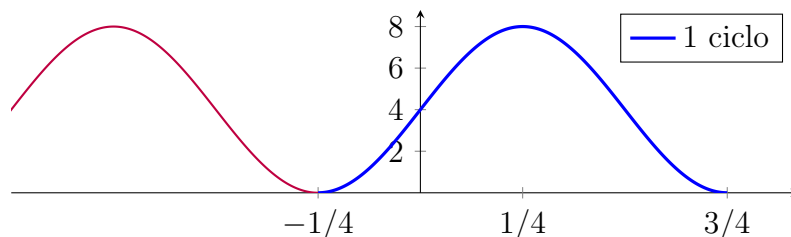
$$f(x) = 2 \sin \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right].$$

La gráfica se obtiene de la del seno por magnificación vertical de factor 2, dilatación horizontal de factor $1/2$ y traslación $\pi/6$. Periodo $= \pi$, amplitud $= 2$. Ceros: $\frac{\pi}{6} + n\pi$ y $\frac{2\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.



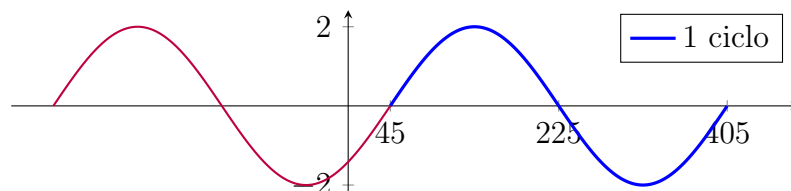
23. Halle el dominio, la imagen, el periodo fundamental, la amplitud y los ceros. Dibuje un ciclo de $f(x) = -4 \cos(2\pi x + \pi/2) + 4$.

Solución.



24. Si $\sin(x^\circ) = \sin((\pi/180)x)$, dibuje un ciclo de $f(x) = 2 \sin(x - 45)^\circ$.

Solución.



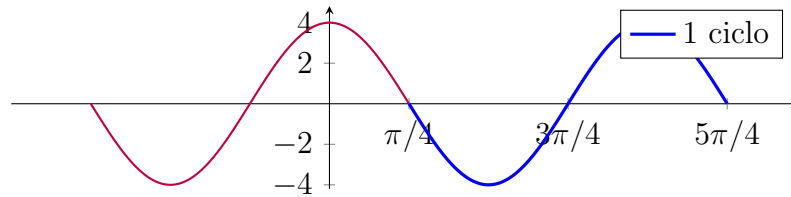
25. Sea $f(x) = -4 \sin(2x - \pi/2)$.

- Halle el periodo y la amplitud de f .
- Dibuje la gráfica de f .

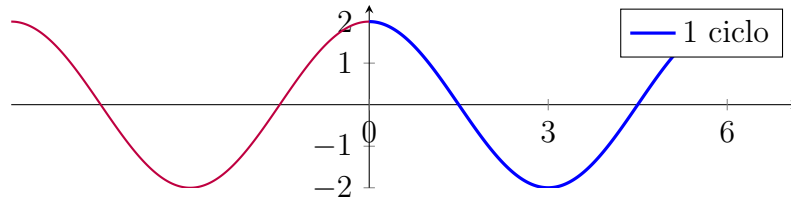
Solución.

$$f(x) = -4 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

La gráfica se obtiene de la del seno por reflexión horizontal, magnificación vertical de factor 4, dilatación horizontal de factor $1/2$ y traslación $\pi/4$.



26. Sea $f(x) = 2 \cos(\pi x/3)$. Halle el periodo fundamental y la amplitud. Dibuje un ciclo de la gráfica.



Solución. Periodo = 6; amplitud = 2.

27. Si el periodo fundamental de una función periódica f es 4, indique el periodo fundamental de $3f(4x) + 5$.

Solución. Sea $g(x) = 3f(4x) + 5$. Solo la dilatación horizontal afecta el periodo. Como el argumento $4x$ comprime el eje por 4, el periodo de g es 1: $g(x+1) = g(x)$ para todo x .

28. Si el periodo fundamental de una función periódica f es 4, indique el periodo fundamental de:

(a) $f(3x - 2)$

(b) $f(3(x - 2))$

29. Halle el valor exacto (si existe). No use calculadoras.

(a) $\cos^{-1}(1)$

(d) $\cos^{-1}(-\sqrt{2}/2)$

(g) $\tan^{-1}(-1)$

(b) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$

(e) $\sin^{-1}(1)$

(c) $\sec^{-1}(-2/\sqrt{3})$

(f) $\sin^{-1}(1/2)$

30. Para cada expresión halle el valor exacto (si existe):

(a) $\cos(\csc^{-1}(-3/4))$

(e) $\sin(\tan^{-1}(-1/3))$

(b) $\cos(\tan^{-1}(-7/2))$

(f) $\cot(\cos^{-1}(-1/3))$

(c) $\sin(\sin^{-1}(4\pi))$

(g) $\sec(\tan^{-1} \sqrt{11})$

(d) $\csc(\sin^{-1}(1/5))$

(h) $\tan(\cos^{-1}(-15/17))$

31. Sea $\text{TRIG} = \{\cos, \sin, \tan, \sec, \csc, \cot\}$. Para cada $f, g \in \text{TRIG}$, halle una fórmula para $(f \circ g^{-1})(y)$.

32. Para cada expresión halle el valor exacto (si existe):

(a) $\sin^{-1}(\sin 4)$. Respuesta: $\pi - 4$.

(b) $\sin^{-1}(\cos 0)$.

(c) $\cos^{-1}(\cos 4)$. Respuesta: $2\pi - 4$.

(d) $\sin^{-1}(\sin \pi)$.

(e) $\sin^{-1}(-1/2)$. $-\pi/6$

(f) $\cos^{-1}(7\pi/4)$. no existe

(g) $\sin(\sin^{-1}(3\pi/5))$. no existe

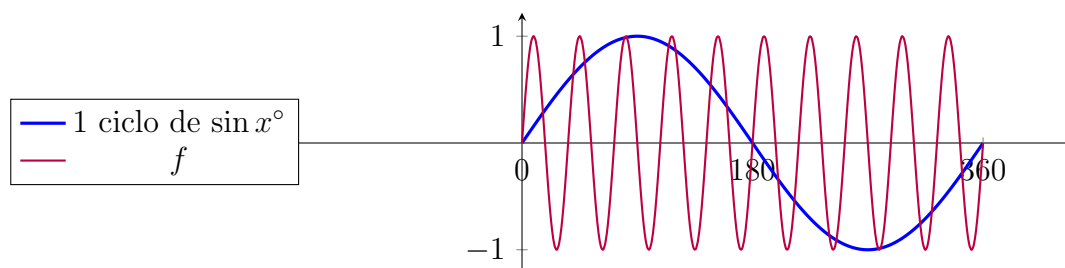
(h) $\cos(\sin^{-1}(1/5))$. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

33. Halle el valor exacto de $\sum_{n=1}^7 \cos(n\pi/8)$.

Solución. Los puntos $P(\pi/8), \dots, P(7\pi/8)$ son simétricos respecto al eje vertical, luego la suma de sus abscisas es cero:

$$\sum_{n=1}^7 \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) = 0.$$

34. Halle el número de ceros de $f(x) = \sin(10x^\circ)$ en el intervalo $[0, 180]$.



Solución. $\sin(x^\circ)$ tiene periodo 360° , luego f tiene periodo 36° . Los ceros ocurren cada 18° . En $[0, 180]$ hay 11 ceros.

35. En $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $b = 6$ y $\tan \angle B = 3/4$. Halle:

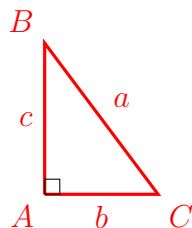
(a) c

(c) $\cos \angle B$

(b) a

(d) $\tan(2\angle C)$

Solución.



$$\tan B = \frac{b}{c} \iff \frac{3}{4} = \frac{6}{c} \iff c = 8,$$

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \frac{4}{5},$$

$$\tan C = \frac{4}{3},$$

$$\tan(2C) = \frac{2 \cdot (4/3)}{1 - (4/3)^2} = -\frac{24}{7}.$$

36. Demuestre la identidad $\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} = (\sec t + \tan t)^2$.

Solución.

$$\begin{aligned} (\sec t + \tan t)^2 &= \left(\frac{1 + \sin t}{\cos t} \right)^2 = \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos^2 t} = \frac{(1 + \sin t)^2}{1 - \sin^2 t} \\ &= \frac{(1 + \sin t)^2}{(1 - \sin t)(1 + \sin t)} = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}. \end{aligned}$$

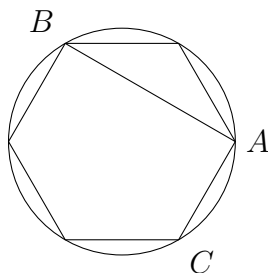
37. Demuestre la identidad $\sqrt{1 + \sin 2x} = |\sin x + \cos x|$.

Solución.

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x.$$

El resultado se sigue al tomar raíz cuadrada no negativa.

38. Un hexágono regular está inscrito en un círculo de radio 1.



Halle las medidas de AB y AC . Demuestre que $\triangle ABC$ es rectángulo.

Solución. El hexágono se divide en seis triángulos equiláteros de lado 1. El ángulo central $\angle AOB = 120^\circ$ y $\angle AOC = 60^\circ$, luego

$$AB = 2 \sin(60^\circ) = \sqrt{3}, \quad AC = 2 \sin(30^\circ) = 1, \quad BC = 2.$$

Como $AB^2 + AC^2 = 3 + 1 = 4 = BC^2$, el recíproco de Pitágoras implica que $\triangle ABC$ es rectángulo en A .

39. Encuentre todas las soluciones en $[0, 2\pi)$ de $4 \cos t + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Solución.

$$\begin{aligned} 4 \cos t + 3\sqrt{3} = \sqrt{3} &\iff \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff t \in \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}. \end{aligned}$$

40. Sea $I = [8\pi, 10\pi]$.

(a) Indique las asíntotas verticales de $f(x) = \csc x$ en I .

(b) Indique las asíntotas verticales de $g(x) = \tan x$ en I .

(c) Halle las soluciones de $\sin x = -1$ en I .

Solución.

(a) $\sin x = 0 \iff x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. En I : $\{8\pi, 9\pi, 10\pi\}$.

(b) $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. En I : $\{17\pi/2, 19\pi/2\}$.

(c) $\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. En I : $\{19\pi/2\}$.

41. Encuentre el valor exacto de $\cos(\pi/4 - \cos^{-1}(3/5))$.

Solución.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \cos^{-1} \frac{3}{5}\right) &= \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{5} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$