

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO – RÍO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PREGUNTAS DE PRÁCTICA SOBRE LAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Instrucciones: *Muestre todo el trabajo para obtener crédito.*

Apellidos: _____ Nombre: _____
Núm. de estudiante: _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Resuelva sobre los reales:

- | | |
|--|--|
| a. $\cos t = 1/2$. | j. $\tan t = 1$. |
| b. $\cos t = -1/2$. | k. $\tan t = -1$. |
| c. $\cos x = -1$. | l. $\tan t = \sqrt{3}$. |
| d. $\cos^2 x - 1 = 0$. | m. $\csc x = 1/2$. |
| e. $\cos x = 2$. | n. $3\sin^2 x - 4\cos x + 1 = 0$. |
| f. $\sin t = -1/2$. | o. $\sin(x + \pi) = 0$. |
| g. $\sin 3t = 1/2$. | p. $3\cos x = 2\sin^2 x$. |
| h. $\sin^2 x - 1 = 0$. | q. $\cos 2\theta = 3\sin \theta - 1$. |
| i. $\sin^2 \phi + \sin \phi - 2 = 0$. | r. $4\sin x \cos x = 1$. |

2. Resuelva sobre el intervalo indicado.

- | | |
|---|--|
| a. $\sin 3x = 1/2, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$. | f. $2\cos x - 3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$. |
| b. $\cos 3x = -1/2, \quad 0 < x < 2\pi$. | g. $\sin 2x = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$. |
| c. $\sin^2 t = 3\cos^2 t, \quad 0 < t < 4\pi$. | h. $\sin x = \sin(-x), \quad x \in \mathbb{R}$. |
| d. $\sin 3t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. | i. $\cos(-t) = -\cos t, \quad 0 < t < 4\pi$. |
| e. $\sin \theta \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad 0 < \theta < 4\pi$. | j. $\sin(10\pi x) = 0, \quad x \in [0, 1]$. |
| | k. $4^{\sin x} = 2, \quad 0 < x < \pi$. |

3. Para cada ecuación, halle el número de soluciones en el intervalo $[0, 10\pi]$:

- | | |
|--------------------------------|--|
| a. $\cos \frac{x}{3} = -1$. | c. $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 1/2$. |
| b. $\cos \frac{x}{3} = -1/2$. | d. $\sin x = -1$. |

4. a. Halle números reales A , ω y δ tales que

$$\sin t + \cos t = A \sin(\omega t + \delta) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

b. Use el resultado de la parte (a) para resolver $\sin t + \cos t = 1$.

Soluciones

Se resuelve uno de cada tres ejercicios, en el orden de los apartados.

1(c). $\cos x = -1$.

$$\cos x = -1 \iff x = \pi + 2n\pi \iff x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Conjunto solución: $\{(2n+1)\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

1(f). $\sin t = -1/2$.

$$\sin t = -\frac{1}{2} \iff t = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Conjunto solución: $\{\frac{7\pi}{6} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{11\pi}{6} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

1(i). $\sin^2 \phi + \sin \phi - 2 = 0$. Sea $u = \sin \phi$. Entonces

$$u^2 + u - 2 = 0 \iff (u+2)(u-1) = 0 \iff u = -2 \text{ o } u = 1.$$

Como $\sin \phi = -2$ es imposible,

$$\sin \phi = 1 \iff \phi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Conjunto solución: $\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

1(l). $\tan t = \sqrt{3}$.

$$\tan t = \tan \frac{\pi}{3} \iff t = \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

pues el periodo de la tangente es π . Conjunto solución: $\{\frac{\pi}{3} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

1(o). $\sin(x + \pi) = 0$.

$$\sin(x + \pi) = 0 \iff -\sin x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Conjunto solución: $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

1(r). $4 \sin x \cos x = 1$.

$$\begin{aligned} 4 \sin x \cos x = 1 &\iff 2 \sin 2x = 1 \iff \sin 2x = \frac{1}{2} \\ &\iff 2x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{o} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{12} + n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{12} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Conjunto solución: $\{\frac{\pi}{12} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{12} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

2(c). $\sin^2 t = 3 \cos^2 t$, $0 < t < 4\pi$. Si $\cos t = 0$, entonces $1 = 0$, lo cual es imposible. Dividiendo por $\cos^2 t$,

$$\begin{aligned}\tan^2 t = 3 &\iff \tan t = \pm\sqrt{3} \\ &\iff t = \frac{\pi}{3} + n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

En el intervalo $(0, 4\pi)$ se obtiene

$$\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3} \right\}.$$

2(f). $2 \cos x - 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \frac{3}{2}.$$

Como $\left|\frac{3}{2}\right| > 1$, no hay solución real. Conjunto solución: $\emptyset$.

2(i). $\cos(-t) = -\cos t$, $0 < t < 4\pi$. Como el coseno es par, $\cos(-t) = \cos t$, luego

$$\cos t = -\cos t \iff 2 \cos t = 0 \iff \cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En el intervalo $(0, 4\pi)$ se obtiene

$$\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right\}.$$

3(a). Número de soluciones de $\cos(x/3) = -1$ en $[0, 10\pi]$.

$$\cos \frac{x}{3} = -1 \iff \frac{x}{3} = (2n+1)\pi \iff x = 3(2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La condición $0 \leq 3(2n+1)\pi \leq 10\pi$ equivale a $0 \leq 2n+1 \leq 10/3$. Los enteros impares posibles son 1 y 3, es decir, $n = 0$ y $n = 1$. Hay 2 soluciones: $x = 3\pi$ y $x = 9\pi$.

3(d). Número de soluciones de $\sin x = -1$ en $[0, 10\pi]$.

$$\sin x = -1 \iff x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La condición $0 \leq 3\pi/2 + 2n\pi \leq 10\pi$ equivale a $-3/4 \leq n \leq 17/4$, luego $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Hay 5 soluciones:

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}, \frac{19\pi}{2}.$$