

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO – RÍO PIEDRAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PREGUNTAS DE PRÁCTICA SOBRE EL ORDEN EN LOS NÚMEROS REALES

Instrucciones: *Muestre todo el trabajo para obtener crédito.*

Apellidos: _____ Nombre: _____
 Núm. de estudiante: _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Halle un emparejamiento entre los símbolos $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\neq$, $\geq$ y las frases siguientes.

(a) es menor o igual a	(d) es no más de	(g) es menor que
(b) es igual a	(e) es mayor o igual a	(h) es más que
(c) no es igual a	(f) es por lo menos	(i) es no menos de

Solución.

(a) $\leq$	(d) $\leq$	(g) $<$
(b) $=$	(e) $\geq$	(h) $>$
(c) $\neq$	(f) $\geq$	(i) $\geq$

Observación: “no menos de” significa $\geq$, no $\leq$.

2. La negación de “ $a < b$ y $c = d$ ” es:

(a) $a > b$ y $c \neq d$	(c) $a \geq b$ y $c \neq d$	(e) ninguna de las anteriores
(b) $a \geq b$ o $c \neq d$	(d) $a > b$ o $c \neq d$	

Solución. $\neg((a < b) \wedge (c = d))$ es $(a \geq b) \vee (c \neq d)$. La respuesta es (b).

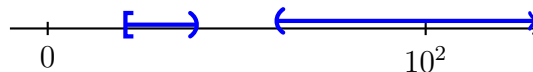
3. Defina *intervalo per genus proximum et differentia specifica*. Según su definición, ¿es intervalo el conjunto vacío?

Solución. Un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ es un *intervalo* si, para todos $a, b \in I$ con $a < b$,

$$a < x < b \implies x \in I.$$

El conjunto vacío satisface la condición de manera vacua (no hay $a, b \in \emptyset$), así que, con esta definición, $\emptyset$ es un intervalo.

4. Escriba el conjunto indicado en notación de intervalos.



Solución. La escala va de 0 a 100, así que las marcas están en 20, 40 y 60. El conjunto es $[20, 40) \cup (60, \infty)$.

5. Halle contraejemplos para demostrar que las siguientes afirmaciones no son ciertas para todo número real.

(a) Si $x < y$, entonces $|x| < |y|$.

(b) $|x| < 3$ si y solo si $x < 3$ o $-x < 3$.

(c) $|x| > 3$ si y solo si $x > 3$ y $-x > 3$.

Solución.

(a) Tome $x = -5$ y $y = -1$. Entonces $x < y$, pero $|x| = 5 > 1 = |y|$.

(b) El lado derecho $x < 3$ o $x > -3$ es cierto para $x = 10$, pero $|10| < 3$ es falso.

(c) El lado derecho $x > 3$ y $x < -3$ es imposible. Con $x = 5$ se tiene $|5| > 3$, pero $-5 > 3$ es falso.

6. Resuelva $(x - 2)(x + 1) < 0$.

Solución. Un producto de dos factores es negativo si y solo si los factores tienen signos opuestos. Eso ocurre precisamente cuando

$$-1 < x < 2.$$

7. Resuelva $x^2 - x \geq 12$.

Solución.

$$x^2 - x - 12 \geq 0 \iff (x - 4)(x + 3) \geq 0 \iff x \leq -3 \text{ o } x \geq 4.$$

En notación de intervalos: $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$.

8. Resuelva $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Solución.

$$(x - 3)(x + 2) \leq 0 \iff -2 \leq x \leq 3.$$

9. Resuelva $\frac{1}{x} < 0$.

Solución. $\frac{1}{x} < 0$ si y solo si $x < 0$.

10. Resuelva $|x - 2| < 7$.

Solución. $d(x, 2) < 7$, luego $-5 < x < 9$.

11. Resuelva $|-2x - 2| > -2$.

Solución. El valor absoluto es no negativo, así que es mayor que -2 para todo $x \in \mathbb{R}$.
El conjunto solución es $\mathbb{R}$.

12. Resuelva $(3x - 2)^2 > 4$.

Solución.

$$\begin{aligned}(3x - 2)^2 - 2^2 &> 0 \\ (3x - 4)(3x) &> 0 \\ x(3x - 4) &> 0 \\ x < 0 \quad \text{o} \quad x &> \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

En notación de intervalos: $(-\infty, 0) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$.

13. Resuelva $\sqrt{x^2} \geq -x$.

Solución. $\sqrt{x^2} = |x|$. Si $x \geq 0$, entonces $x \geq -x$, que es cierto. Si $x < 0$, entonces $-x \geq -x$, que también es cierto. La desigualdad vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. Resuelva $\frac{1}{x} < -2$.

Solución.

$$\frac{1}{x} < -2 \iff \frac{1 + 2x}{x} < 0.$$

Numerador y denominador tienen signos opuestos exactamente cuando

$$-\frac{1}{2} < x < 0.$$

15. Resuelva $-2|5 - 2x| - 2 \leq 6$.

Solución.

$$-2|5 - 2x| \leq 8 \iff |5 - 2x| \geq -4,$$

pues al dividir por -2 se invierte la desigualdad. Todo valor absoluto es $\geq 0 \geq -4$, así que la desigualdad es cierta para todo $x \in \mathbb{R}$.

16. Resuelva $|5 - 2x| \geq 5$.

Solución.

$$\begin{aligned}|5 - 2x| \geq 5 &\iff 5 - 2x \leq -5 \quad \text{o} \quad 5 - 2x \geq 5 \\ &\iff x \geq 5 \quad \text{o} \quad x \leq 0.\end{aligned}$$

El conjunto solución es $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$.

17. Resuelva $2 < |x| < 3$.

Solución. $|x| = d(x, 0)$, así que se pide que la distancia al origen esté entre 2 y 3:

$$x \in (-3, -2) \cup (2, 3).$$

18. Resuelva $\sqrt{x^2} < -x$.

Solución. $\sqrt{x^2} < -x \iff |x| < -x$. Si $x \geq 0$, entonces $x < -x$, que es falso. Si $x < 0$, entonces $-x < -x$, que también es falso. El conjunto solución es $\emptyset$.

19. Escriba $-17 < 2 + x < -11$ en la forma $|x - a| < r$.

Solución.

$$-19 < x < -13.$$

El centro es

$$a = \frac{-19 + (-13)}{2} = -16$$

y el radio es $r = 3$. Por tanto

$$|x - (-16)| < 3 \quad \text{i.e.} \quad |x + 16| < 3.$$

20. Escriba $\frac{2}{-\pi x + 1} > 1$ en la forma $|x - a| < r$.

Solución. Sea $\theta = -\pi x + 1$. Si $\theta > 0$, entonces $2 > \theta$, o sea $0 < \theta < 2$. Si $\theta < 0$, al multiplicar se invierte la desigualdad y se obtiene $2 < \theta$, imposible. Luego

$$\begin{aligned} 0 < -\pi x + 1 < 2 &\iff -1 < -\pi x < 1 \\ &\iff -\frac{1}{\pi} < x < \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Esto es

$$|x| < \frac{1}{\pi}.$$

21. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ y $c < 0$, demuestre que $cb < ca$.

Solución. Como $a < b$, se tiene $b - a > 0$. Al multiplicar por $c < 0$ se invierte la desigualdad:

$$c(b - a) < 0 \iff cb - ca < 0 \iff cb < ca.$$

22. Si p es el predicado $x - 2 \geq 0$ y q es el predicado $2x - 3 < 5$, halle los $x \in \mathbb{R}$ tales que $p \wedge \neg q$ sea cierto.

Solución. p dice $x \geq 2$. q dice $x < 4$, luego $\neg q$ dice $x \geq 4$. Así, $p \wedge \neg q$ es $x \geq 4$.

23. Sean a, b, c, d números reales que satisfacen $a < c$ y $b < d$. Para cada proposición decida si es cierta o falsa. Si es cierta, demuéstrela. Si es falsa, dé un contraejemplo.

$$\begin{array}{l|l} \text{(a)} & a + b < c + d \\ \text{(b)} & ab < cd \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(c)} & a - b < c - d \\ \text{(d)} & a/b < c/d \end{array}$$

Solución.

- (a) Cierta: $a < c$ y $b < d$ implican $a + b < c + d$.
 (b) Falsa: $a = -2$, $c = 3$, $b = -3$, $d = 1$. Entonces $ab = 6$ y $cd = 3$.
 (c) Falsa: $a = 1$, $c = 2$, $b = 0$, $d = 3$. Entonces $a - b = 1$ y $c - d = -1$.
 (d) Falsa (con $b, d \neq 0$): $a = 1$, $c = 2$, $b = -2$, $d = -1$. Entonces $a/b = -\frac{1}{2}$ y $c/d = -2$.

24. Demuestre que $0 < x < y \implies \sqrt{x} < \sqrt{y}$.

Solución. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $0 < x < y$. Suponga, por el contrario, que $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. Al multiplicar por $\sqrt{x} > 0$ y por $\sqrt{y} > 0$ se obtiene

$$x \geq \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \text{y} \quad \sqrt{x}\sqrt{y} \geq y.$$

Por transitividad, $x \geq y$, lo cual contradice $x < y$. Por tanto $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

25. Simplifique $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{x+2} \geq 0\}$.

Solución. Como $(x+2)^2 > 0$ si $x \neq -2$,

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x+2} \geq 0 &\iff (x-3)(x+2) \geq 0 \quad \text{y} \quad x \neq -2 \\ &\iff x < -2 \quad \text{o} \quad x \geq 3. \end{aligned}$$

En notación de intervalos:

$$(-\infty, -2) \cup [3, \infty).$$

26. Sean a, b números reales con $a < b$. Si $x = \frac{5}{13}a + \frac{8}{13}b$, demuestre que $a < x < b$.

Solución. Como $\frac{5}{13} + \frac{8}{13} = 1$ y $b - a > 0$,

$$x - a = \frac{5}{13}a + \frac{8}{13}b - a = \frac{8}{13}(b - a) > 0,$$

luego $x > a$. Análogamente,

$$b - x = b - \frac{5}{13}a - \frac{8}{13}b = \frac{5}{13}(b - a) > 0,$$

luego $x < b$. Por tanto $a < x < b$.

27. Sean a, b números reales con $a < b$. Si $0 < t < 1$, demuestre que $a < ta + (1 - t)b < b$.

Solución. Como $a < b$ y $t > 0$,

$$ta < tb. \quad (1)$$

Como $a < b$ y $1 - t > 0$,

$$(1 - t)a < (1 - t)b. \quad (2)$$

Luego

$$a = ta + (1 - t)a \stackrel{(2)}{<} ta + (1 - t)b \stackrel{(1)}{<} tb + (1 - t)b = b.$$

28. Simplifique

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{x+3} \geq 1\}.$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{x+3} \geq 1 &\iff \frac{1-x-(x+3)}{x+3} \geq 0 \\ &\iff \frac{-2(x+1)}{x+3} \geq 0 \\ &\iff \frac{x+1}{x+3} \leq 0, \quad x \neq -3 \\ &\iff -3 < x \leq -1. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$x^2 - x - 6 \leq 0 \iff -2 \leq x \leq 3.$$

La intersección es

$$(-3, -1] \cap [-2, 3] = [-2, -1].$$

29. El conjunto solución de $|2x - 1| > 1$ es:

(a) $(1, \infty)$	(c) $(0, 1)$	(e) $(-\infty, 0) \cap (1, \infty)$
(b) $(0, \infty)$	(d) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$	

Solución.

$$\begin{aligned} |2x - 1| > 1 &\iff 2x - 1 < -1 \quad \text{o} \quad 2x - 1 > 1 \\ &\iff x < 0 \quad \text{o} \quad x > 1. \end{aligned}$$

La respuesta es (d).