

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO – RÍO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PREGUNTAS DE PRÁCTICA SOBRE LOGARITMOS

Instrucciones: *Muestre todo el trabajo para obtener crédito.*

Apellidos: _____ Nombre: _____
Núm. de estudiante: _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Sea $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle una fórmula para $f^{-1}(y)$.

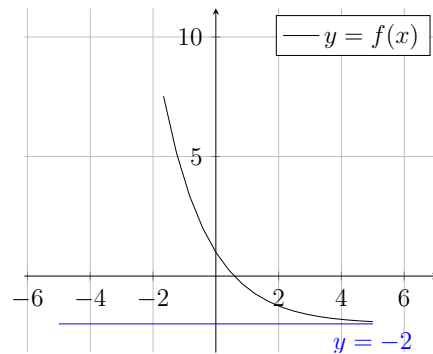
(b) Dibuje la gráfica de f .

Solución.

$$\begin{aligned}y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 &\iff y = 3 \cdot 2^{-x} - 2 \\&\iff 2^{-x} = \frac{y+2}{3} \\&\iff x = -\log_2 \frac{y+2}{3}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$f^{-1}(y) = -\log_2 \frac{y+2}{3}, \quad y > -2.$$



2. Resuelva $\log_{e+x} e^8 = 2$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_{e+x} e^8 = 2 &\iff (e+x)^2 = e^8, \quad e+x > 0, \quad e+x \neq 1 \\&\iff e+x = e^4 \\&\iff x = e^4 - e.\end{aligned}$$

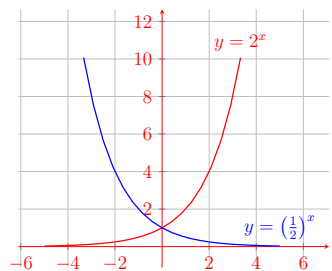
3. Si $\log_e x = \frac{1}{3}$, halle el valor exacto de $\log_{e^2} x$.

Solución.

$$\log_{e^2} x = \frac{\log_e x}{\log_e(e^2)} = \frac{1/3}{2} = \frac{1}{6}.$$

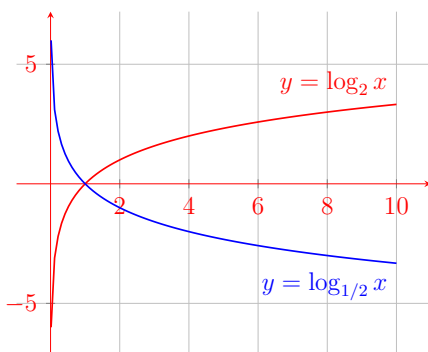
4. Dibuje las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución.



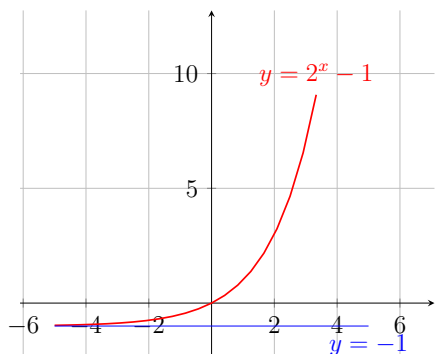
5. Haga un dibujo de las gráficas de las relaciones $y = \log_2 x$ y $y = \log_{1/2} x$.

Solución.

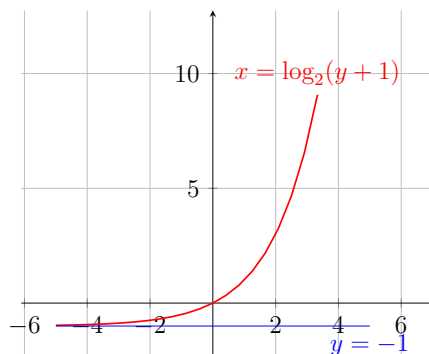


6. Haga un dibujo de las gráficas de las relaciones siguientes. Indique interceptos y asíntotas (si las hay).

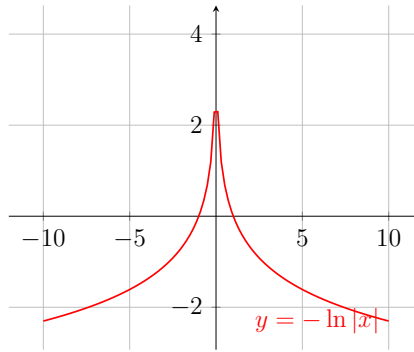
(a) $\{(x, y) : y = 2^x - 1\}$



(b) $\{(x, y) : x = \log_2(y + 1)\}$



7. Haga un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = -\ln |x|$.



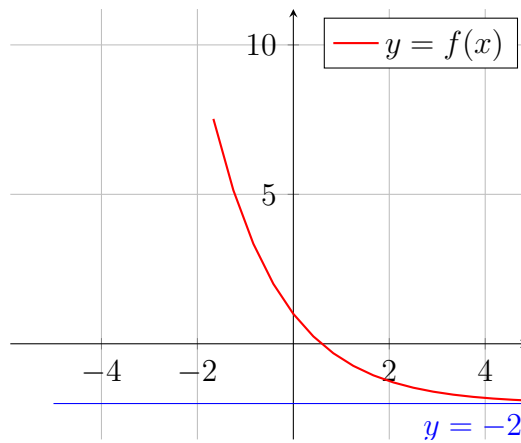
8. Sea $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle una fórmula para $f^{-1}(y)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 &\iff y = 3 \cdot 2^{-x} - 2 \\
 &\iff 2^{-x} = \frac{y+2}{3} \\
 &\iff x = -\log_2 \frac{y+2}{3} \\
 &\iff f^{-1}(y) = -\log_2 \frac{y+2}{3}, \quad y > -2.
 \end{aligned}$$

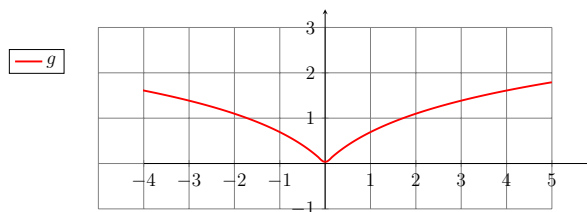
(b) Dibuje la gráfica de f .



9. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0, \\ x^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Si $g(x) = f(|x|)$, dibuje la gráfica de g en el plano cartesiano.



Observación. g es una función par. Para $x \geq 0$, la gráfica es una traslación de $\ln x$ una unidad hacia la izquierda.

10. Resuelva $\log_3(x) + \log_3(x - 24) = 4$.

Solución.

$$\begin{aligned} \log_3(x) + \log_3(x - 24) = 4 &\iff \log_3(x(x - 24)) = 4 \\ &\iff x^2 - 24x - 81 = 0, \quad x > 24 \\ &\iff (x - 27)(x + 3) = 0, \quad x > 24 \\ &\iff x = 27. \end{aligned}$$

11. Resuelva $\log_3 \circ \log_3 \circ \log_3\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Solución.

$$\begin{aligned} \log_3(\log_3(\log_3 \frac{1}{x})) = 0 &\iff \log_3(\log_3 \frac{1}{x}) = 1 \\ &\iff \log_3 \frac{1}{x} = 3 \\ &\iff \frac{1}{x} = 27 \\ &\iff x = \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

12. Si $\log_e x = \frac{1}{3}$, $\log_e y = \frac{2}{5}$ y $\log_e z = \frac{3}{7}$, halle:

(a) $\log_e \left(\frac{x}{yz}\right)^2$

Solución.

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x}{yz}\right)^2 &= 2(\ln x - \ln y - \ln z) \\ &= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}\right) \\ &= 2\left(\frac{35 - 42 - 45}{105}\right) \\ &= -\frac{104}{105}. \end{aligned}$$

(b) $\log_{e^2} x$

Solución.

$$\log_{e^2} x = \frac{\log_e x}{\log_e(e^2)} = \frac{\log_e x}{2} = \frac{1}{6}.$$

13. Sea $f(y) = \log_2 y$ y $g(y) = \frac{\ln y}{k}$. Halle la constante k si $f = g$.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_2 y = \frac{\ln y}{k} &\iff \frac{\ln y}{\ln 2} = \frac{\ln y}{k} \\ &\iff k = \ln 2.\end{aligned}$$

14. Sea $f(t) = 2^t$ y $g(t) = e^{-kt}$. Halle la constante k si $f = g$.

Solución.

$$\begin{aligned}2^t = e^{-kt} &\iff t \ln 2 = -kt \\ &\iff k = -\ln 2.\end{aligned}$$

15. Si $\log_b M = \frac{1}{5}$, $\log_b N = \frac{2}{5}$ y $\log_b L = \frac{3}{5}$, evalúe las expresiones siguientes:

(a) $\log_b(L \cdot M)$

Solución.

Solución.

$$\begin{aligned}\log_b(L \cdot M) &= \log_b L + \log_b M \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_b \left(\frac{\sqrt{L \cdot M}}{N^3} \right) &= \frac{1}{2}(\log_b L + \log_b M) - 3 \log_b N \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{2}{5} \\ &= -\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

(b) $\frac{\log_b M}{\log_b N}$

Solución.

$$\frac{\log_b M}{\log_b N} = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}.$$

(d) $\log_N M$

Solución.

$$\log_N M = \frac{\log_b M}{\log_b N} = \frac{1}{2}.$$

(c) $\log_b \left(\frac{\sqrt{L \cdot M}}{N^3} \right)$

16. Suponga que $\log_4 s = A$, $\log_8 t^2 = 6A^2$ y $\log_2 r = 2A^3$. Halle (en términos de A):

(a) $\log_2 s$ y $\log_2 t$.

Solución.

$$A = \log_4 s = \frac{\log_2 s}{\log_2 4}.$$

Como $\log_2 4 = 2$, se tiene $\log_2 s = 2A$. Además

$$\log_8 t^2 = 2 \log_8 t = 6A^2 \implies \log_8 t = 3A^2 = \frac{\log_2 t}{\log_2 8}.$$

Como $\log_2 8 = 3$, se tiene $\log_2 t = 9A^2$.

(b) $\log_2 \left(\frac{s^2 t}{r} \right)$

Solución.

$$\log_2 \left(\frac{s^2 t}{r} \right) = 2 \log_2 s + \log_2 t - \log_2 r = 4A + 9A^2 - 2A^3.$$

17. Si n es un entero y $0.8451 < \log_{10} n < 0.8459$, halle el número de dígitos en la expansión decimal de n^{100} .

Solución.

$$\begin{aligned} 0.8451 < \log_{10} n < 0.8459 &\iff 10^{0.8451} < n < 10^{0.8459} \\ &\iff 10^{84.51} < n^{100} < 10^{84.59}. \end{aligned}$$

Luego

$$10^{84} < n^{100} < 10^{85},$$

y n^{100} tiene 85 dígitos.

Observación. Por la construcción del sistema de numeración indoárabigo, un número natural entre 10^n y 10^{n+1} tiene exactamente $n+1$ dígitos en su representación decimal. En base 2, el número de bits necesarios para almacenar un entero se obtiene de manera análoga tomando el logaritmo en base 2.

18. Resuelva sobre los reales:

$$7^{2x+1} = \left(\frac{1}{49} \right)^{10x}.$$

Solución.

$$\begin{aligned} 7^{2x+1} = \left(\frac{1}{49} \right)^{10x} &\iff 7^{2x+1} = (7^{-2})^{10x} \\ &\iff 7^{2x+1} = 7^{-20x} \\ &\iff 2x+1 = -20x \\ &\iff x = -\frac{1}{22}. \end{aligned}$$

19. Resuelva $\log_3(x) + \log_3(x - 24) = 4$.

Solución. Véase el ítem 10. La solución es $x = 27$.

20. Resuelva $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 40$.

Solución.

$$\begin{aligned}\ln x + \ln(x - 3) = \ln 40 &\iff \ln(x(x - 3)) = \ln 40 \\ &\iff x(x - 3) = 40 \quad \text{y} \quad x > 3 \\ &\iff x^2 - 3x - 40 = 0 \quad \text{y} \quad x > 3 \\ &\iff (x - 8)(x + 5) = 0 \quad \text{y} \quad x > 3 \\ &\iff x = 8.\end{aligned}$$

21. Halle números reales a y b tales que

$$\log\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{25}\right) = a \log(x + 1) + b.$$

Solución.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{25}\right) &= \log(x + 1)^2 - \log 25 \\ &= 2 \log(x + 1) - \log 25.\end{aligned}$$

Luego

$$2 \log(x + 1) - \log 25 = a \log(x + 1) + b \quad \text{para todo } x > -1.$$

Al poner $x = 0$ y usar $\log 1 = 0$ se obtiene $b = -\log 25$. De ahí, $a = 2$.

22. Escriba $3^{2x} - 6(3^x)$ como una diferencia de dos cuadrados.

Solución. Completando el cuadrado,

$$\begin{aligned}3^{2x} - 6 \cdot 3^x &= (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x \\ &= (3^x - 3)^2 - 3^2.\end{aligned}$$

23. Si $\ln(ey) = \ln x - \ln(x + 1) + 1$, demuestre que $y = \frac{x}{x + 1}$.

Solución. Como $1 = \ln e$,

$$\begin{aligned}\ln(ey) &= \ln x - \ln(x + 1) + 1 \implies \ln(ey) = \ln x - \ln(x + 1) + \ln e \\ &\implies \ln(ey) = \ln\left(\frac{ex}{x + 1}\right) \\ &\implies ey = \frac{ex}{x + 1} \\ &\implies y = \frac{x}{x + 1}.\end{aligned}$$

24. Encuentre la función inversa de $g(x) = e^{e^x}$. Nota: por definición, $e^{e^{e^x}} = e^{(e^{e^x})}$.

Solución. Si f tiene inversa, $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$. Basta despejar x en términos de y :

$$\begin{aligned} y = e^{e^x} &\iff \ln y = e^x \\ &\iff \ln(\ln y) = e^x \\ &\iff \ln(\ln(\ln y)) = x. \end{aligned}$$

Por tanto

$$g^{-1}(y) = \ln(\ln(\ln y)), \quad y > e.$$

25. Encuentre la función inversa de $g(x) = \ln(\ln(x+4)) - 2$.

Solución.

$$\begin{aligned} y = \ln(\ln(x+4)) - 2 &\iff y + 2 = \ln(\ln(x+4)) \\ &\iff e^{y+2} = \ln(x+4) \\ &\iff e^{e^{y+2}} = x + 4 \\ &\iff x = e^{e^{y+2}} - 4. \end{aligned}$$

Por tanto

$$g^{-1}(y) = e^{e^{y+2}} - 4, \quad y \in \mathbb{R}.$$