

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO - RÍO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PREGUNTAS DE PRÁCTICA SOBRE FUNCIONES - PARTE 2

Instrucciones: *Muestre todo el trabajo para obtener crédito.*

Apellidos: _____ Nombre: _____

Número de estudiante: _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Demuestre que la función $f(x) = x + \sqrt{x}$ es inyectiva.

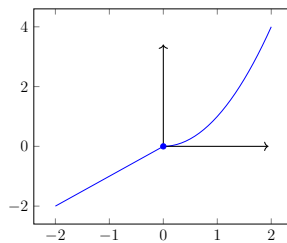
Solución.

Sea $x, x' \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\implies x + \sqrt{x} = x' + \sqrt{x'} \\ &\implies x - x' + \sqrt{x} - \sqrt{x'} = 0 \\ &\implies (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x'})^2 + \sqrt{x} - \sqrt{x'} = 0 \\ &\implies (\sqrt{x} - \sqrt{x'})(\sqrt{x} + \sqrt{x'} + 1) = 0. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{x} + \sqrt{x'} + 1 > 0$, debe ocurrir que $\sqrt{x} - \sqrt{x'} = 0$. Por tanto $x = x'$ y se sigue que f es inyectiva.

2. Se dice que dos funciones f y g son *iguales* (se escribe $f = g$) si sus dominios, codominios y gráficas son todos iguales. Se define una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

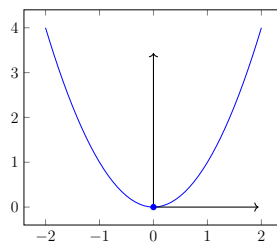


Gráfica de f

- (a) Trace la gráfica de la función g dada por $g(x) = f(|x|)$.

Solución.

$$g(x) = f(|x|) = x^2$$



Gráfica de g

- (b) Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Determine, usando la definición de igualdad, si $h = g$ o no. Justifique su respuesta.

Solución.

Las funciones g y h son iguales puesto que tienen el mismo dominio $\mathbb{R}$, el mismo codominio $\mathbb{R}$ y la misma gráfica $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

3. Una función $f : \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}$ tiene gráfica $G_f = \{(3, 8), (4, 16), (5, 32), (6, 64)\}$,

- (a) ¿Cuál es el codominio de f ?

Solución.

$$C_f = \mathbb{N}.$$

- (b) Halle la imagen (campo de valores) de f .

solución

$$\text{Im } f = \{8, 16, 32, 64\}.$$

- (c) Halle el dominio y la gráfica G_g de la función g definida por $g(x) = f(x + 10)$.

solución

$$D_g = \{-7, -6, -5, -4\}, \quad G_g = \{(-7, 8), (-6, 16), (-5, 32), (-4, 64)\}.$$

Nótese que G_g es una traslación a la izquierda de G_f por 10 unidades.

- (d) Halle el dominio y la gráfica G_h de la función h definida por $h(x) = f(\frac{x}{3})$.

solución

$$D_h = \{9, 12, 15, 18\}, \quad G_h = \{(9, 8), (12, 16), (15, 32), (18, 64)\}.$$

Nótese que G_h es un zoom horizontal de G_f con factor de magnificación 3.

- (e) Una función g satisface la condición $x = g(y) \iff y = f(x)$. Halle la gráfica G_g de la función g . Nota: La gráfica es un conjunto de pares ordenados. La pregunta no pide un dibujo de la gráfica.

solución

$$\text{Como } (y, x) \in G_g \iff (x, y) \in G_f,$$

$$G_g = \{(8, 3), (16, 4), (32, 5), (64, 6)\}.$$

4. Sea x un número real. Sea $d(x, 0)$ la distancia entre x y el origen. Sea $f(x) = d(x, 0)$. Trace una gráfica de f en el plano cartesiano. ¿Es f una función?

Solución.

Como cada número real tiene una distancia única al origen, f es una función.

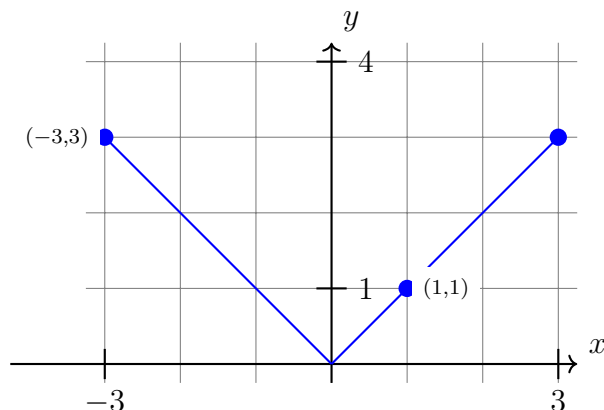
solución

Como la distancia es no negativa:

- (a) Si $x \geq 0$ entonces $d(x, 0) = x$

- (b) Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y así $d(x, 0) = -x$.

En otras palabras, $f(x) = |x|$.



5. Una función biyectiva f tiene gráfica $G_f = \{(1, 2), (-1, -2), (0, 0), (2, 4)\}$.

- (a) Halle la gráfica G_g de la función biyectiva g definida por $g(x) = f(x + 2)$.

Solución.

$$G_g = \{(-1, 2), (-3, -2), (-2, 0), (0, 4)\}.$$

Observación: G_g es una traslación de G_f por 2 unidades hacia la izquierda.

- (b) Halle la gráfica $G_{g^{-1}}$ de la función g^{-1} .

Solución.

$$G_{g^{-1}} = \{(2, -1), (-2, -3), (0, -2), (4, 0)\}.$$

Observación: $G_{g^{-1}}$ es una reflexión de G_g sobre la recta $y = x$.

- (c) Halle la gráfica G_h de la función $h(x) = f^{-1}(x) - 2$.

Solución.

$$G_h = \{(2, -1), (-2, -3), (0, -2), (4, 0)\}.$$

Observación: h es la función inversa de g .

6. Si la función $f(x) = x^3$, $x > -1$ es biyectiva, halle

(a) $D_{f^{-1}}$

(b) $CV_{f^{-1}}$

(c) $f^{-1}(y)$.

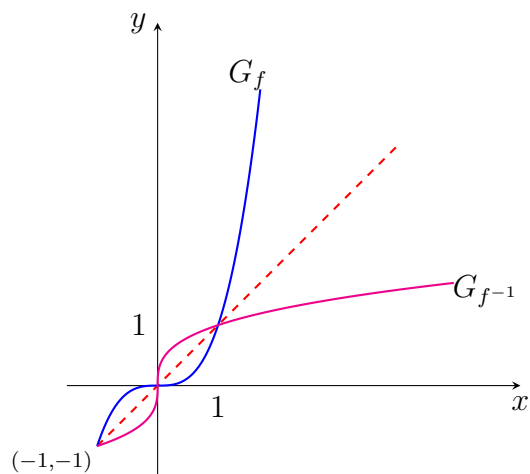
Trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo sistema de coordenadas.

Solución.

$$D_{f^{-1}} = C_f = (-1, \infty)$$

$$CV_{f^{-1}} = D_f = (-1, \infty).$$

$$f^{-1}(y) = y^{1/3}, \quad y > -1.$$



7. Si la función $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $x \geq 0$ es biyectiva, halle

(a) $D_{f^{-1}}$

(b) $CV_{f^{-1}}$

(c) $f^{-1}(y)$.

Trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo sistema de coordenadas.

Solución

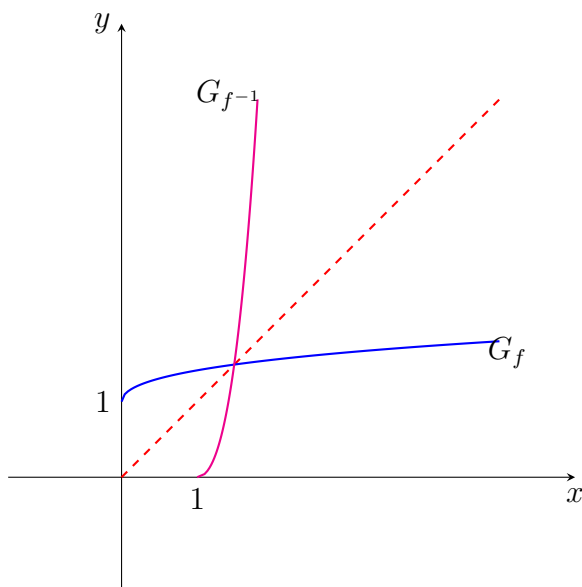
$$D_{f^{-1}} = C_f = [1, \infty)$$

$$CV_{f^{-1}} = D_f = [0, \infty).$$

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow x = (y^2 - 1)^2, \quad y \geq 1.$$

Por tanto, $f^{-1}(y) = (y^2 - 1)^2$, $y \geq 1$.



8. Si la función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}$$

es biyectiva, halle

(a) $D_{f^{-1}}$

(b) $CV_{f^{-1}}$

(c) $f^{-1}(y)$.

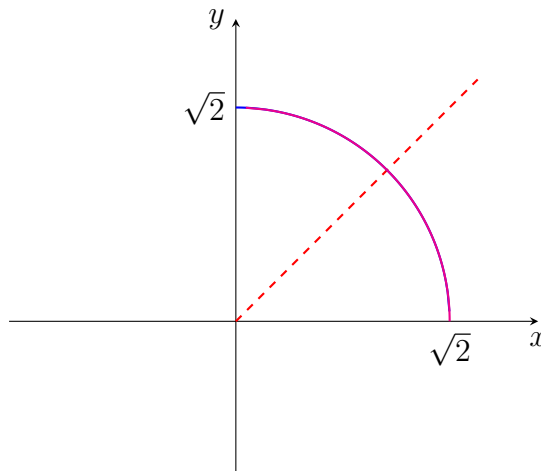
Trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo sistema de coordenadas.

Solución.

$$D_{f^{-1}} = C_f = [0, \sqrt{2}]$$

$$CV_{f^{-1}} = D_f = [0, \sqrt{2}].$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{2 - y^2}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}.$$



9. Sea $g(x) = 1 + \frac{1}{2x}$; $x \neq 0$.

(a) Demuestre que g es inyectiva.

(b) Halle una fórmula para $g^{-1}(y)$.

(c) Halle el campo de valores (imagen) de g .

Solución.

Sea $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\implies 1 + \frac{1}{2x} = 1 + \frac{1}{2x'} \\ &\implies \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x'} \\ &\implies 2x = 2x' \\ &\implies x = x' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = 1 + \frac{1}{2x} &\implies \frac{1}{2x} = y - 1 \\
&\implies 2x = \frac{1}{y-1} \quad y \neq 1 \\
&\implies x = \frac{1}{2(y-1)} \quad y \neq 1.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{2(y-1)}, \quad y \neq 1.$$

Finalmente, como g es una biyección,

$$\text{Im } g = D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

10. La función α definida por

$$\alpha(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

convierte grados Celsius C a grados Fahrenheit F .

(a) Halle una fórmula para $\alpha^{-1}(F)$.

solución

$$\begin{aligned}
F = \frac{9}{5}C + 32 &\iff F - 32 = \frac{9}{5}C \\
&\iff C = \frac{5}{9}(F - 32).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\alpha^{-1}(F) = \frac{5}{9}(F - 32).$$

(b) Verifique que $\alpha(\alpha^{-1}(F)) = F$.

solución

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha^{-1}(F)) &= \frac{9}{5} \left(\frac{5}{9}(F - 32) \right) + 32 \\
&= F.
\end{aligned}$$

(c) Halle el punto C tal que $\alpha(C) = C$.

solución

$$\begin{aligned}
\alpha(C) = C &\iff \frac{9}{5}C + 32 = C \\
&\iff \frac{4}{5}C = -32 \\
&\iff C = -40
\end{aligned}$$

Por tanto $-40^\circ\text{F} = -40^\circ\text{C}$.

11. Una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $g(g(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que g es inyectiva.

solución

Sean $x, x' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\implies g(g(x)) = g(g(x')) \\ &\implies x = x'. \end{aligned}$$

Por tanto

$$g(x) = g(x') \implies x = x'$$

o, por contraposición,

$$x \neq x' \implies g(x) \neq g(x').$$

Como elementos distintos del dominio se envían a elementos distintos del codominio, g es inyectiva.

(b) Muestre que g es sobreyectiva.

solución

g tiene codominio $C_g = \mathbb{R}$ y dominio $D_g = \mathbb{R}$. Sea $y \in C_g$. Para mostrar que g es sobreyectiva basta hallar un elemento x en el dominio de g tal que $g(x) = y$. Sea $x = g(y)$. Entonces $x \in D_g$ y $g(x) = g(g(y)) = y$. Por tanto x satisface $g(x) = y$ como se requería. Se sigue que g es sobreyectiva.

(c) Si $(3, 4)$ es un punto en la gráfica de g , halle $g(4)$.

solución

$$\begin{aligned} g(3) = 4 &\implies g(g(3)) = g(4) \\ &\implies 3 = g(4). \end{aligned}$$

12. Si la función $X(t) = t^2 + 2t$, $t \geq -1$ es biyectiva, halle

(a) $D_{X^{-1}}$

(b) $CV_{X^{-1}}$

(c) $X^{-1}(s)$.

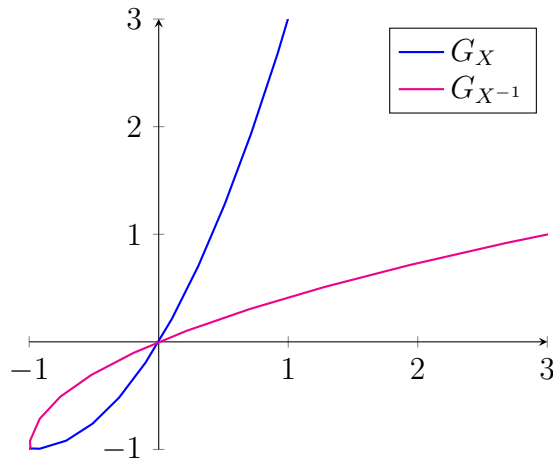
Trace las gráficas de X y X^{-1} en el mismo sistema de coordenadas.

Solución. Sea $s = X(t)$.

$$\begin{aligned} s &= t^2 + 2t, \quad t \geq -1 \\ &\implies s = (t+1)^2 - 1, \quad t \geq -1 \\ &\implies |t+1| = \sqrt{s+1}, \quad t \geq -1 \\ &\implies t = \sqrt{s+1} - 1, \quad s \geq -1 \end{aligned}$$

$$D_{X^{-1}} = C_X = [-1, \infty), \quad CV_{X^{-1}} = D_X = [-1, \infty).$$

$$X^{-1}(s) = \sqrt{s+1} - 1, \quad s \geq -1.$$



13. Sea $f(x) = \pi + \frac{1}{x - \pi}$.

- (a) Demuestre que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in D_f$.
- (b) Demuestre que f es inyectiva.
- (c) Halle una fórmula para $f^{-1}(y)$.
- (d) Trace la gráfica de f .

Solución.

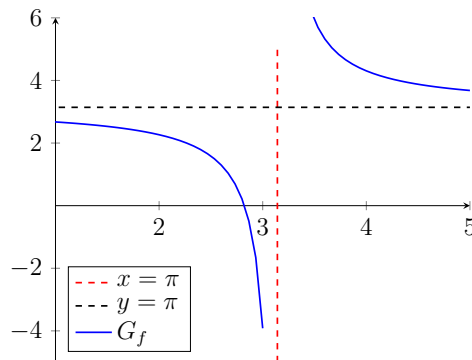
La función es una traslación de la hipérbola $y = 1/x$ por el vector (π, π) y así $D_f = C_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$. Por tanto, si $x \in D_f$, entonces $f(f(x))$ existe y

$$\begin{aligned}
 f(f(x)) &= \pi + \frac{1}{\left(\pi + \frac{1}{x - \pi}\right) - \pi} \\
 &= \pi + \frac{1}{\left(\frac{1}{x - \pi}\right)} \\
 &= \pi + (x - \pi) \\
 &= x, \quad x \neq \pi.
 \end{aligned}$$

Sean $x, x' \in D_f$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = f(x') &\implies f(f(x)) = f(f(x')) \\
 &\implies x = x'.
 \end{aligned}$$

Por tanto f es inyectiva. De (a) se sigue que $f = f^{-1}$. Por tanto $f^{-1}(y) = \pi + \frac{1}{y - \pi}$.



14. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se define h por $h(x) = 1 + f(2x)$. Si $(10, 16)$ es un punto en la gráfica de f , halle todo x para el cual el valor de $h(x)$ pueda determinarse. Evalúe h para estos valores.

Solución.

Como

$$f(f(x)) = x$$

se tiene que $f = f^{-1}$. Por tanto la gráfica G_f de f es simétrica respecto a la recta $y = x$. Como $(10, 16) \in G_f$ debe ocurrir que $(16, 10) \in G_f$. La gráfica de h es una contracción horizontal de la de f por un factor $\frac{1}{2}$ seguida de una traslación hacia arriba de 1 unidad. Se sigue que $h(5) = 17$ y $h(8) = 11$.

15. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se define una función h por $h(x) = f(x - 1)$. Si $(1, 3)$ es un punto en la gráfica de f , ¿cuál de las siguientes debe ser verdadera:

(a) $h(4) = 2$

(c) $h(4) = 3$.

(e) Ninguna de las anteriores

(b) $f(2) = 4$

(d) $h(4) = 1$.

Solución.

Como $f(f(x)) = x$, se tiene $f = f^{-1}$. En particular, $f(1) = 3$ implica $f(3) = 1$. Entonces $h(4) = f(4 - 1) = f(3) = 1$. No se puede concluir que $f(2) = 4$. Por tanto la afirmación que debe ser verdadera es $h(4) = 1$.

16. Demuestre que la función

$$f(x) = \frac{1 - x}{2 - 3x}$$

es inyectiva. Halle su imagen (campo de valores)

Solución.

El dominio es $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2/3\}$. Sean $a, a' \in D_f$

$$f(a) = f(a')$$

$$\implies \frac{1 - a}{2 - 3a} = \frac{1 - a'}{2 - 3a'}$$

$$\implies (2 - 3a')(1 - a) = (2 - 3a)(1 - a')$$

$$\implies -3a' - 2a = -3a - 2a'$$

$$\implies a - a' = 0$$

$$\implies a = a'.$$

Por tanto,

$$f(a) = f(a') \implies a = a'$$

lo que prueba que f es inyectiva. Para hallar la imagen de f nótese que

$$y = \frac{1 - x}{2 - 3x} \implies (2 - 3x)y = 1 - x, \quad x \neq 2/3$$

$$\implies x(1 - 3y) = 1 - 2y \quad x \neq 2/3$$

$$\implies x = \frac{1 - 2y}{1 - 3y}, \quad y \neq \frac{1}{3}.$$

Se sigue que para todo $y \neq 1/3$ la ecuación $y = f(x)$ puede resolverse para $x \in D_f$. Esto muestra que $\text{Im } f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.

17. Si las funciones siguientes son biyectivas, halle una fórmula para $f^{-1}(y)$.

(a) $f(x) = x$.

(c) $f(x) = 1/x$.

(e) $f(x) = x + 2$.

(b) $f(x) = -x$.

(d) $f(x) = 2x$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Solución.

(a) $f^{-1}(y) = y$.

(b) $f^{-1}(y) = -y$.

(c) $f^{-1}(y) = 1/y, \quad y \neq 0$.

(d) $f^{-1}(y) = y/2$.

(e) $f^{-1}(y) = y - 2$.

(f) Tomando, por ejemplo, $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, se tiene $f^{-1}(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

18. Sea $f: \{x : x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$. Demuestre que f es inyectiva. Explique por qué f no es sobreyectiva.

Solución.

Sean $x, x' \geq 0$.

$$f(x) = f(x') \implies 2\sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x'} + 1 \implies \sqrt{x} = \sqrt{x'} \implies x = x'.$$

Por tanto f es inyectiva. No es sobreyectiva porque el codominio es $\mathbb{R}$ y $\text{Im } f = [1, \infty) \neq \mathbb{R}$. Por ejemplo, no existe $x \geq 0$ tal que $f(x) = 0$.

19. Halle α y β si el conjunto

$$G = \{(1, 4), (3, \alpha), (1, \beta), (3, 1)\}$$

es la gráfica de una función inyectiva.

Solución.

Para que G sea gráfica de una función, a cada primera componente le corresponde una única segunda componente. Así $\beta = 4$ y $\alpha = 1$. El conjunto se reduce a $\{(1, 4), (3, 1)\}$, que corresponde a una función inyectiva. Por tanto $\alpha = 1$ y $\beta = 4$.