

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO – RÍO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PREGUNTAS DE PRÁCTICA SOBRE FUNCIONES FINITAS

Instrucciones: *Muestre todo el trabajo para obtener crédito.*

Apellidos: _____ Nombre: _____
Núm. de estudiante: _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Si a , b y c son distintos, ¿cuáles de los siguientes conjuntos NO pueden ser la gráfica de una función?
- (a) $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, c), (5, c)\}$
 - (b) $\{(1, a), (1, a), (2, c), (3, c), (4, c)\}$
 - (c) $\{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c), (4, c)\}$
 - (d) $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)\}$
 - (e) $\{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$

Solución. (c) y (d).

2. ¿Cuáles de los conjuntos podrían ser la gráfica de una función?
- (a) $\{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \gamma), (4, \gamma), (5, \gamma)\}$
 - (b) $\{(1, \alpha), (1, \alpha), (2, \gamma), (2, \gamma), (4, \gamma)\}$
 - (c) $\{((1, 1), 2), ((1, 2), 3), ((2, 1), 3), ((3, 5), 8), ((4, 0), 0)\}$
 - (d) $\{((T, T), T), ((T, F), T), ((F, T), T), ((F, F), F)\}$
 - (e) $\{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \gamma)\}$

Solución. Todos son funciones.

3. ¿Cuántas funciones distintas hay con dominio $\{1, 2, 3, 4\}$ y contradominio $\{a, b, c\}$? **Solución.** $3^4 = 81$.
4. ¿Cuántas funciones inyectivas (uno a uno) hay con dominio $\{1, 2, 3\}$ y contradominio $\{a, b, c, d\}$? **Solución.** $P(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
5. Una función finita $f: \{2, 4, 6, 8\} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene gráfica $G_f = \{(2, -10), (4, -8), (6, -6), (8, -4)\}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
- (a) La imagen (campo de valores) de f es $\mathbb{R}$.
 - (b) La imagen de f es $\{-4, -6, -8, -10\}$.
 - (c) Si h se define por $h(x) = f(2x)$, entonces el dominio de h es $\{1, 2, 3, 4\}$.
 - (d) La gráfica de h es $G_h = \{(4, -10), (8, -8), (12, -6), (16, -4)\}$.

Solución. (b) y (c).

6. Una función biyectiva f tiene gráfica $G_f = \{(1, 2), (-1, -2), (0, 0), (2, 4)\}$.

(a) Halle la gráfica G_g de la función biyectiva g definida por $g(x) = f(x + 2)$. **Solución.**

$$G_g = \{(-1, 2), (-3, -2), (-2, 0), (0, 4)\}.$$

Observación: G_g es una traslación de G_f dos unidades hacia la izquierda.

(b) Halle la gráfica $G_{g^{-1}}$ de g^{-1} . **Solución.**

$$G_{g^{-1}} = \{(2, -1), (-2, -3), (0, -2), (4, 0)\}.$$

Observación: $G_{g^{-1}}$ es la reflexión de G_g respecto de la recta $y = x$.

(c) Halle la gráfica G_h de $h(x) = f^{-1}(x) - 2$. **Solución.**

$$G_h = \{(2, -1), (-2, -3), (0, -2), (4, 0)\}.$$

Observación: h es la función inversa de g .

7. Una función finita $f: \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}$ tiene gráfica $G_f = \{(3, 8), (4, 16), (5, 32), (6, 64)\}$. Una función g satisface $x = g(y) \iff y = f(x)$. Halle la gráfica G_g de g .

Observación: la gráfica es un conjunto de pares ordenados; no se pide un dibujo. **Solución.**

Como $(y, x) \in G_g \iff (x, y) \in G_f$,

$$G_g = \{(8, 3), (16, 4), (32, 5), (64, 6)\}.$$

8. Una función finita $f: \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}$ tiene gráfica $G_f = \{(3, 8), (4, 16), (5, 32), (6, 64)\}$. Halle el dominio D_g y la gráfica G_g de $g(x) = f(x + 10)$. **Solución.**

$$D_g = \{-7, -6, -5, -4\}, \quad G_g = \{(-7, 8), (-6, 16), (-5, 32), (-4, 64)\}.$$

Observe que G_g es una traslación de G_f diez unidades hacia la izquierda.

9. Una función finita $f: \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}$ tiene gráfica $G_f = \{(3, 8), (4, 16), (5, 32), (6, 64)\}$. Halle el dominio D_g y la gráfica G_g de $g(x) = f(\frac{1}{2}x + 6)$. **Solución.** Se tiene $x \in D_g \iff \frac{1}{2}x + 6 \in D_f = \{3, 4, 5, 6\}$. Para $3 \in D_f$, $\frac{1}{2}x + 6 = 3 \iff x = -6$, luego $-6 \in D_g$. Los demás elementos se obtienen de la misma forma.

$$D_g = \{-6, -4, -2, 0\},$$

$$G_g = \{(-6, 8), (-4, 16), (-2, 32), (0, 64)\}.$$

Este problema también puede resolverse con un zoom horizontal seguido de una traslación.

10. Una función f tiene gráfica $G_f = \{(15, -13), (-31, 7), (4, 3), (-6, 4)\}$. Halle:

(a) La gráfica G_g de $g(x) = f(x - 50)$. **Solución.** G_g es una traslación de G_f cincuenta unidades hacia la derecha:

$$G_g = \{(65, -13), (19, 7), (54, 3), (44, 4)\}.$$

(b) La imagen (campo de valores) de f^{-1} . **Solución.**

$$\text{Im}(f^{-1}) = \{15, -31, 4, -6\}.$$

11. Las funciones f y g tienen gráficas

$$G_f = \{(0, 3), (1, 3), (4, 0), (6, 3), (8, 2)\},$$

$$G_g = \{(-1, 3), (0, 2), (1, 4), (5, 0), (6, 0), (8, 3)\}.$$

Halle:

(a) $D_{f/g}$

(b) $G_{f/g}$

(c) $\text{Im}(f/g)$

Solución.

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\} = \{0, 1, 8\}.$$

$$G_{f/g} = \{(0, 3/2), (1, 3/4), (8, 2/3)\}, \quad \text{Im}(f/g) = \{3/2, 3/4, 2/3\}.$$

12. Una función f tiene gráfica $G_f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 5)\}$. Se define g por $g(x) = 1 + f(x - 5)$. Halle:

(a) La imagen (campo de valores) de g .

(b) La gráfica G_g de g .

Solución. $x - 5 \in \{1, 2, 3\}$ implica $D_g = \{6, 7, 8\}$.

$$G_g = \{(6, 2), (7, 3), (8, 6)\}, \quad \text{Im } g = \{2, 3, 6\}.$$

13. Una función finita $f: \{2, 4, 6\} \rightarrow \mathbb{N}$ tiene gráfica $G_f = \{(2, 1), (4, 2), (6, 5)\}$. Se define g por $g(x) = f(2x + 6)$. Halle:

(a) El dominio de g . **Solución.** $2x + 6 \in \{2, 4, 6\}$ si y solo si $x \in \{-2, -1, 0\}$. Así, $D_g = \{-2, -1, 0\}$.

(b) La gráfica G_g de g . **Solución.**

$$G_g = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 5)\}.$$

14. Considere la función g cuya gráfica es $G_g = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 6)\}$. Si $f(x) = g(\frac{1}{2}x)$:

(a) Halle $f(8)$.

(c) Halle la imagen (campo de valores) de f .

(b) Halle el dominio de f .

(d) ¿Es inyectiva f ? Explique.

Solución.

- (a) $f(8) = g(4) = 4$.
- (b) $\frac{1}{2}x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ implica $D_f = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
- (c) $\text{Im } f = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- (d) No. Por ejemplo $f(6) = g(3) = 4 = g(4) = f(8)$ y $6 \neq 8$.

15. Sea f la función finita $f = (D_f, C_f, G_f)$ donde

$$D_f = \{4, 8, 12\}, \quad C_f = \{16, 64, 144\}, \quad G_f = \{(4, 16), (8, 64), (12, 144)\}.$$

Sea h la función $h(x) = f(4x)$.

- (a) Halle el dominio, el contradominio, la gráfica y la imagen de h .
- (b) Si $g = h^{-1}$, evalúe $g(h(g(16)))$.

Solución.

- (a) $4x \in \{4, 8, 12\}$ implica $D_h = \{1, 2, 3\}$. Puede tomarse $C_h = C_f = \{16, 64, 144\}$.

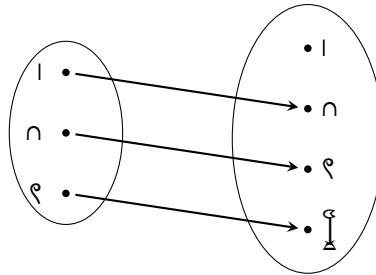
$$G_h = \{(1, 16), (2, 64), (3, 144)\}, \quad \text{Im } h = \{16, 64, 144\}.$$

- (b) $g(16) = 1$, $h(1) = 16$ y $g(16) = 1$. Por tanto el valor es 1.

16. Un papiro egipcio recién descubierto contiene el decreto

$$\text{“Sean } A = \{ \text{I}, \text{II}, \text{III} \}, \quad B = \{ \text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV} \}, \quad R = \{ (\text{I}, \text{II}), (\text{II}, \text{III}), (\text{III}, \text{IV}) \} \text{”}.$$

- (a) Bosqueje el grafo bipartito correspondiente a la relación (A, B, R) .



- (b) Con la definición de función dada en las notas, decida si la relación (A, B, R) es una
 - i. función
 - ii. función inyectiva
 - iii. función suprayectiva
 - iv. biyección

Solución. Como todo vértice del dominio tiene grado de salida exactamente 1, la relación es una función: para cada $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$. Como todo vértice del contradominio tiene grado de entrada a lo sumo 1, la función es inyectiva. El vértice I del contradominio tiene grado de entrada 0, así que la función no es suprayectiva ni biyectiva.

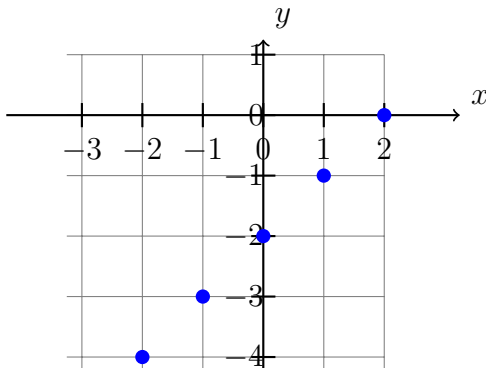
17. Sea $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función finita dada por $f(x) = -d(x - 2, 0)$, donde $d(x, 0)$ es la distancia entre x y el origen.

(a) Halle la gráfica G_f de f . **Solución.**

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, f(x)) : x \in D_f\} \\ &= \{(-2, -4), (-1, -3), (0, -2), (1, -1), (2, 0)\}. \end{aligned}$$

Observe que $f(x)$ es el opuesto de la distancia entre 2 y x .

(b) Dibuje la gráfica de f en el plano cartesiano.



(c) Halle la imagen de f . **Solución.**

$$\text{Im } f = \{-4, -3, -2, -1, 0\}.$$

Observación: la imagen de f es la proyección de su gráfica sobre el eje vertical.

(d) Escriba f en términos del valor absoluto. **Solución.**

$$f(x) = -|x - 2|.$$