

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO – RÍO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PREGUNTAS DE PRÁCTICA SOBRE EL TEOREMA DEL BINOMIO

Instrucciones: *Muestre todo el trabajo para obtener crédito.*

Apellidos: _____ Nombre: _____

Núm. de estudiante: _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Evalúe $\binom{20}{2} - \binom{20}{18}$.

Primera solución.

$$\begin{aligned}\binom{20}{2} - \binom{20}{18} &= \frac{20!}{2!18!} - \frac{20!}{18!2!} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Segunda solución. Observe que $\binom{20}{2}$ es el número de subconjuntos de exactamente 2 elementos en un conjunto de 20 elementos, y que $\binom{20}{18}$ es el número de subconjuntos de exactamente 18 elementos. El complemento de un subconjunto de 2 elementos tiene 18 elementos. Contar los subconjuntos o contar sus complementos da el mismo resultado, así que

$$\binom{20}{2} = \binom{20}{18}.$$

Más generalmente, si $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Por tanto la diferencia pedida es 0.

2. Simplifique $\binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{10}{4}$.

Solución. Por la identidad de Pascal,

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{3} = \binom{10}{3}.$$

Luego

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} = \binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330.$$

3. Evalúe:

(a) $\binom{99}{97} + \binom{99}{98}$

(b) $\binom{9}{2} + \binom{9}{3} - \binom{10}{7}$

Solución.

(a) Por la identidad de Pascal y la simetría,

$$\binom{99}{97} + \binom{99}{98} = \binom{100}{98} = \binom{100}{2} = 4950.$$

(b) De nuevo por Pascal y la simetría,

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{3} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7},$$

luego la diferencia es 0.

4. Evalúe $\binom{100}{1} + \binom{99}{9} - \binom{99}{90}$.

Solución. Como $\binom{99}{90} = \binom{99}{9}$ y $\binom{100}{1} = 100$,

$$\binom{100}{1} + \binom{99}{9} - \binom{99}{90} = 100.$$

5. Un conjunto de n elementos tiene 36 subconjuntos de 2 elementos. Halle n .

Solución.

$$\binom{n}{2} = 36 \implies \frac{n(n-1)}{2} = 36 \implies n(n-1) = 72.$$

Como n es un número natural, $n = 9$.

6. Demuestre que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Solución. Por definición, si $0 \leq r \leq n$,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{n-r}.$$

En términos de conjuntos: $\binom{n}{r}$ cuenta los subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos. Cada uno de esos subconjuntos determina, por complemento, un único subconjunto de $n-r$ elementos. Por tanto ambos números coinciden.

7. Escriba y simplifique el término que contiene x^8 en el desarrollo de $(2x^4 + yz)^{12}$.

Solución. El término general es

$$\binom{12}{k} (2x^4)^k (yz)^{12-k} = \binom{12}{k} 2^k x^{4k} y^{12-k} z^{12-k}.$$

Se necesita $4k = 8$, o sea $k = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} \binom{12}{2} (2x^4)^2 (yz)^{10} &= 66 \cdot 4 x^8 y^{10} z^{10} \\ &= 264 x^8 y^{10} z^{10}. \end{aligned}$$

8. Escriba y simplifique el término de grado 4 en x en el desarrollo de $\left(2y^2 - \frac{x}{2}\right)^7$.

Solución. El término general es

$$\binom{7}{k} (2y^2)^{7-k} \left(-\frac{x}{2}\right)^k.$$

El grado 4 en x corresponde a $k = 4$:

$$\begin{aligned} \binom{7}{4} (2y^2)^3 \left(-\frac{x}{2}\right)^4 &= 35 \cdot 8y^6 \cdot \frac{x^4}{16} \\ &= \frac{35}{2} x^4 y^6. \end{aligned}$$

9. Halle el término de grado 7 en el desarrollo de

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5.$$

Solución. El término general es

$$\binom{5}{k} (x^2)^{5-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \binom{5}{k} 2^k x^{10-3k}.$$

Se necesita $10 - 3k = 7$, o sea $k = 1$. Entonces

$$\binom{5}{1} 2^1 x^7 = 10x^7.$$

10. Escriba $(x + y + z)^3 = ((x + y) + z)^3$ y expanda mediante el uso repetido del teorema del binomio.

Solución.

$$\begin{aligned} ((x + y) + z)^3 &= \binom{3}{0} (x + y)^3 + \binom{3}{1} (x + y)^2 z + \binom{3}{2} (x + y) z^2 + \binom{3}{3} z^3 \\ &= (x + y)^3 + 3(x + y)^2 z + 3(x + y) z^2 + z^3. \end{aligned}$$

Ahora

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

luego

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3(x^2 + 2xy + y^2)z + 3(x + y)z^2 + z^3 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3y^2z + 3xz^2 + 6xyz. \end{aligned}$$

11. Escriba y simplifique el desarrollo binomial de $(1 - x)^5$.

Solución.

$$(1 - x)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-x)^k = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5.$$

12. Halle el número natural n tal que $\binom{n}{2} = 21$.

Solución.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 21 \implies n(n-1) = 42.$$

Como n es un número natural, $n = 7$.

13. Simplifique

$$\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \cdots + \binom{15}{14} + \binom{15}{15}.$$

Solución. Por el teorema del binomio,

$$\sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} = (1+1)^{15} = 2^{15} = 32768.$$

14. Escriba y simplifique el término que contiene x^8 en el desarrollo de $(2x^4 + \pi z)^{12}$. Muestre sus cálculos.

Solución. El término general es

$$\binom{12}{k} (2x^4)^k (\pi z)^{12-k} = \binom{12}{k} 2^k x^{4k} \pi^{12-k} z^{12-k}.$$

Se necesita $4k = 8$, o sea $k = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} \binom{12}{2} (2x^4)^2 (\pi z)^{10} &= 66 \cdot 4 x^8 \pi^{10} z^{10} \\ &= 264 x^8 \pi^{10} z^{10}. \end{aligned}$$

15. Expanda por medio del teorema del binomio y simplifique: $(x^2 - 2y)^5$.

Solución.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2y)^5 &= \binom{5}{0} (x^2)^5 + \binom{5}{1} (x^2)^4 (-2y) + \binom{5}{2} (x^2)^3 (-2y)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3} (x^2)^2 (-2y)^3 + \binom{5}{4} (x^2) (-2y)^4 + \binom{5}{5} (-2y)^5 \\ &= x^{10} - 10x^8 y + 40x^6 y^2 - 80x^4 y^3 + 80x^2 y^4 - 32y^5. \end{aligned}$$

16. Demuestre que un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Solución. Por el teorema del binomio,

$$(1 + 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}.$$

Como $\binom{n}{i}$ es el número de subconjuntos de tamaño i de un conjunto de n elementos, la suma cuenta todos los subconjuntos. Por tanto hay 2^n subconjuntos.

17. Halle el número natural m si $mx^{12}y^9z^9$ es un término del desarrollo binomial de $(2x^4 + yz)^{12}$.

Solución. El término general es

$$\binom{12}{k} (2x^4)^k (yz)^{12-k} = \binom{12}{k} 2^k x^{4k} y^{12-k} z^{12-k}.$$

Se necesita $4k = 12$ y $12 - k = 9$, o sea $k = 3$. Entonces

$$m = \binom{12}{3} \cdot 2^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 8 = 220 \cdot 8 = 1760.$$