

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO - RÍO PIEDRAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE 3018 – EXAMEN IV – SEMESTRE II - 2023/24

Instructions: *El uso de medios electrónicos u otros tipos de ayuda está estrictamente prohibido. Conteste todas las preguntas. Para obtener crédito, debe mostrar todo su trabajo. Si es necesario, puede usar el dorso del examen para continuar sus respuestas. Tiempo disponible: 2 hours.*

Apellidos: _____ Nombre: _____
 Estudiante # : _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Sea D la aseveración “ f es diferenciable” y C la aseveración “ f es continua.” Suponga que la implicación “ D solo si C ” es cierta. ¿Cuál(es) (si alguna) de las siguientes expresiones deben ser ciertas también? Hay penalidad en el caso de respuestas incorrectas.

- (a) D si C (c) D es necesaria para C (e) D es suficiente para C
 (b) C es suficiente para D (d) C solo si D

Solution.

It is given that $D \implies C$ is true. The only statement equivalent to this is “ D es suficiente para C .”

2. En un grupo de 1200 estudiantes: 600 tomaron cálculo y 700 tomaron química. Halle:

- (a) el **número mínimo posible** de estudiantes que pudieron haber tomado ambos cursos. **Solution.**
 (b) el **número máximo posible** de estudiantes que pudieron haber tomado ambos cursos. **Solution.**

100

600

3. Sea $f(x) = x^4 + 14x^3 + 12x^2 + 87x + 5$. Halle $f(-13)$ mediante la división sintética

Solution.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -13 & 1 & 14 & 12 & 87 & 5 \\
 & & -13 & -13 & 13 & -1300 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -1 & 100 & -1295
 \end{array}$$

$$q(x) = x^3 + x^2 - x + 100, \quad r = -1295. \quad 4$$

4. Escriba $-\frac{1}{13} + \frac{2}{15} - \frac{3}{17} + \frac{4}{19} - \frac{5}{21}$ en la notación Σ .

Solution.

$$\sum_{i=1}^5 (-1)^i \frac{i}{2i+11}$$

Remark: There are an infinite number of correct solutions.

5. Resuelva $-2x + 4 < -5x + 0$.

Solution.

$$\begin{aligned} -2x + 4 &< -5x + 0 \\ 3x &< -4 \\ x &< -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

6. Sea (t_n) una sucesión geométrica. Si $t_1 = 16$ y $t_{n+1} = \frac{t_n}{10}$, $n \geq 1$

- (a) Escriba una fórmula explícita para el término t_n . (b) Halle $\sum_{i=1}^{\infty} t_i$.

Solution.

$$t_n = \frac{16}{10^{n-1}}$$

Solution.

$$S_{\infty} = \frac{16}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{160}{9}$$

7. Resuelva $|x - 2| < 7$. Dibuje la solución en la recta numérica.

Solution:

$$\begin{aligned} |x - 2| < 7 &\iff d(x, 2) < 7 \\ &\iff -5 < x < 9 \end{aligned}$$

8. Un círculo tiene la ecuación $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 21$. Halle el centro y el radio.

Solution.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x + 2y = 21 &\iff (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 26 \\ &\iff \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{26} \end{aligned}$$

By the distance formula, the center is $(-2, -1)$ and the radius $\sqrt{26}$.

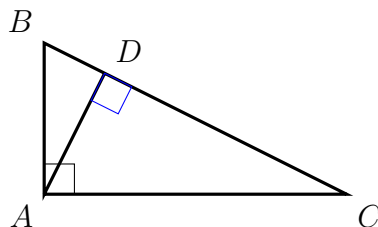
9. Halle el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x + y, x - y) = (14, 26)$. Solution.

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x - y &= 26 \end{aligned}$$

Adding and subtracting yields:

$$\begin{aligned} x &= 20 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

10. Sea $A = (0, 0)$, $B = (0, 10)$ y $C = (20, 0)$. Sea D el punto del segmento BC tal que AD es perpendicular al segmento BC , halle las coordenadas de D .



Solution. The line incident to C and D has equation $y = -\frac{1}{2}x + 10$. It follows that perpendicular line incident to A and D has equation $y = 2x$. The lines intersect when $2x = -\frac{1}{2}x + 10$. I.e., when $x = 4$ and $y = 8$. Hence $D = (4, 8)$.

11. Escriba y simplifique el término que contenga x^8 en el desarrollo de $(2x^4 + \pi z)^{12}$. Muestre sus cálculos.

Solution.

$$\begin{aligned} (2x^4 + \pi z)^{12} &= \binom{12}{0} (2x^4)^0 (\pi z)^{12} + \binom{12}{1} (2x^4)^1 (\pi z)^{11} + \binom{12}{2} (2x^4)^2 (\pi z)^{10} \\ &\quad + \binom{12}{3} (2x^4)^3 (\pi z)^9 + \cdots + \binom{12}{11} (2x^4)^{11} (\pi z)^1 + \binom{12}{12} (2x^4)^{12} (\pi z)^0. \end{aligned}$$

Inspection reveals that the term containing x^8 is

$$\begin{aligned} \binom{12}{2} (2x^4)^2 (\pi z)^{10} &= 66 \cdot (2x^4)^2 (\pi z)^{10} \\ &= 264 x^8 \pi^{10} z^{10}. \end{aligned}$$

12. Una función f con dominio $\{2, 4, 6\}$ tiene gráfica $G_f = \{(2, 1), (4, 2), (6, 5)\}$. Se define una función g mediante la ecuación $g(x) = f(2x + 6)$. Halle:

(a) El dominio de g .

It follows that

$$D_g = \{-2, -1, 0\}$$

(b) La gráfica G_g de la función g .

Solution.

$$\begin{aligned} (x, y) \in D_f &\iff y = f(x) \\ &\iff y = f(x - 6 + 6) \\ &\iff y = f\left(2\left(\frac{x}{2} - 3\right) + 6\right) \\ &\iff \left(\frac{x}{2} - 3, y\right) \in G_g \end{aligned}$$

Solution.

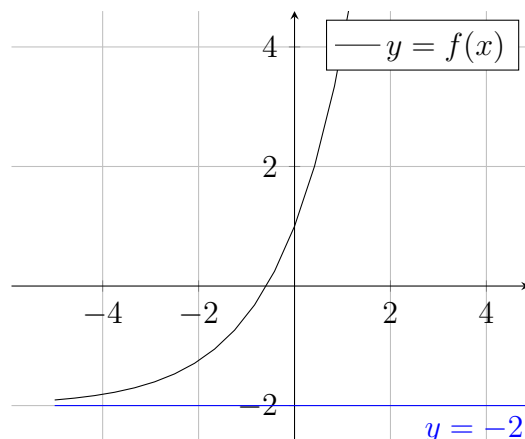
$$G_g = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 5)\}$$

13. Sea $f(x) = 3(2)^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle una fórmula para $f^{-1}(y)$.

Solution.

$$\begin{aligned} y = 3(2)^x - 2 &\iff y + 2 = 3 \times 2^x \\ &\iff 2^x = \frac{y + 2}{3} \\ &\iff x = \log_2 \frac{y + 2}{3} \end{aligned}$$



(b) Dibuje la gráfica de f .

14. Si $\log_e x = \frac{1}{3}$, $\log_e y = \frac{2}{5}$ y $\log_e z = \frac{3}{7}$, halle:

(a) $\log_e \left(\frac{x}{yz} \right)^2$

Solution.

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x}{yz} \right)^2 &= 2(\ln x - \ln y - \ln z) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7} \right) \\ &= 2 \left(\frac{35 - 42 - 45}{105} \right) \\ &= -\frac{104}{105} \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(b) $\log_{e^2} x$

Solution.

$$\log_{e^2} x = \frac{\log_e x}{\log_e e^2} = \frac{\log_e x}{2} = \frac{1}{6}.$$

15. Expresé $\cos(2 \cos^{-1} x)$ sin el uso de funciones trigonométricas o funciones trigonométricas inversas.

Solution.

$$\begin{aligned} \cos(2 \cos^{-1} x) &= 2 \cos^2(\cos^{-1} x) - 1 \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

16. Resuelva $\cos 3x = \frac{1}{2}$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$

Solution. In the interval $0 < x < 2\pi$ the equation $\cos t = \frac{1}{2}$ has general solution

$$t = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \text{ or } t = \frac{-\pi}{3} + n \cdot 2\pi,$$

Hence the general solution of the given equation is

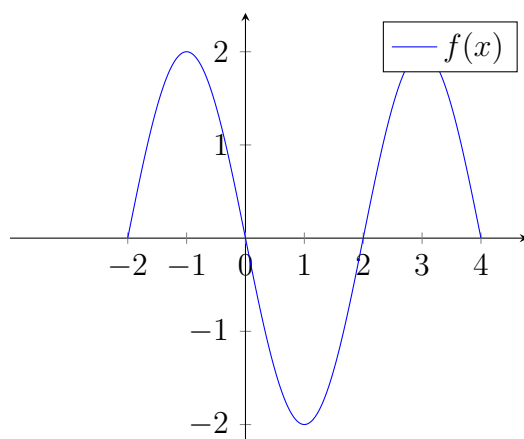
$$x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \text{ or } x = \frac{-\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3},$$

In the interval $0 < x < 2\pi$ the solution set is $\{\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}\}$

17. Sea $f(x) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - 4)\right)$. Halle el periodo y amplitud de f . Dibuje la gráfica.

Solution.

Period $T = 4$, amplitude $A = 2$.



18. Halle $\tan(12345\pi/4)$.

Solution.

$12345 = 4 \times \frac{12344}{4} + 1$. Since $\frac{12344}{4}$ is an integer, it follows that $\tan(12345\pi/4) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$.

19. Una ecuación de la recta incidente al punto $(1, 2)$ y que es paralela a la recta con ecuación $2y + 4x + 6 = 0$ es:

(a) $y = -2x + 4$

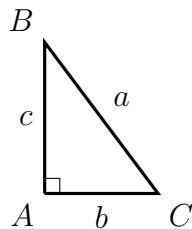
(c) $y = -2x + 5$

(e) Ninguna de las anteriores.

(b) $y = 4x - 2$

(d) $y = 4x - 7$

20. En $\triangle ABC$, $\angle A$ tiene medida 90° , $b = 6$ y $\tan \angle B = \frac{3}{4}$.



Halle:

- (a) c

Solution.

$$\begin{aligned}\tan B &= \frac{b}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} &= \frac{6}{c} \\ \Leftrightarrow c &= 8\end{aligned}$$

Solution.

$$\cos B = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

- (d) $\tan(2\angle C)$

Solution.

$$\begin{aligned}\tan(2C) &= \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} \\ &= -\frac{24}{7}\end{aligned}$$

- (b) a

Solution.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

- (c) $\cos \angle B$

21. **Bono.**

Halle el foco, la directriz, de la parábola definida por la ecuación $4y = (x - 1)^2 + 3$

Solution.

$$\begin{aligned}4y &= (x - 1)^2 + 3 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{4}(x - 1)^2 + 3/4\end{aligned}$$

Focus: $(0, 1) + (1, 3/4) = (1, 7/4)$

Directrix: $y = -1 + \frac{3}{4}$