

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO - RÍO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE 3018– EXAMEN II – SEMESTRE I - 2023-24

Instructions: Debe tener una identificación vigente con foto en caso de que se le solicite. El uso de medios electrónicos u otros tipos de ayuda está estrictamente prohibido. Conteste todas las preguntas. Para obtener crédito, debe mostrar todo su trabajo. Si es necesario, puede usar el dorso de las páginas del examen para continuar sus respuestas. Tiempo disponible: 110 minutos.

Apellidos: _____ Nombre: _____
Estudiante # : _____ Profesor: Philip Pennance Sección: _____

1. Halle el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x + y, x - y) = (14, 26)$.

Solution.

$$x + y = 14$$

$$x - y = 26$$

Adding and subtracting yields:

$$x = 20$$

$$y = -6$$

2. Halle un empareamiento entre los simbolos $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\neq$, $\geq$ y las frases siguientes

(a) es menor o igual a	(d) es no más de	(g) es menor que
(b) es igual a	(e) es mayor o igual a	(h) es más que
(c) no es igual a	(f) es por lo menos	(i) es no menos de

3. Halle una ecuación por una recta L si:

(a) Si pasa por el punto $(-2, 3)$ y es perpendicular a la recta definida por la ecuación $5x + \pi = 3y$.	(b) Si pasa por el punto $(-2, 3)$ y es paralela a la recta definida por la ecuación $5x + \pi = 3y$.
---	--

Solution.

The line $5x + \pi = 3y$ has slope $m = \frac{5}{3}$. Any line perpendicular to this must have slope $-\frac{3}{5}$. Hence the perpendicular line incident to $(-2, 3)$ has equation

$$y - 3 = -\frac{3}{5}(x + 2).$$

Similarly, the parallel line incident to $(-2, 3)$ has equation

$$y - 3 = \frac{5}{3}(x + 2).$$

4. Si $\{x \in \mathbb{R} : -9 < 2x + 1 < 5\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$, halle los valores de c y r .

Solution.

$$\begin{aligned} -9 < 2x + 1 < 5 &\iff -10 < 2x < 4 \\ &\iff -5 < x < 2. \end{aligned}$$

The radius of this interval $r = \frac{7}{2}$ and the midpoint $c = -\frac{3}{2}$.

5. Resuelva $|-2x + 3| < 5$.

Solution.

$$\begin{aligned} |-2x + 3| < 5 &\iff d(-2x + 3, 0) < 7 \\ &\iff -7 < -2x + 3 < 7 \\ &\iff -10 < -2x < 4 \\ &\iff 4 < 2x < -10 \\ &\iff 2 < x < -5. \end{aligned}$$

6. Resuelva la inecuación $(x - 2)(x + 1) < 0$.

Solution.

A product two terms is negative if and only if the factors have opposite signs. It is easy to verify using a table of signs that this occurs if and only if $-1 < x < 2$.

7. Una función finita f tiene gráfica $G_f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 5)\}$. Se define una función g mediante la ecuación $g(x) = 1 + f(x - 5)$. Halle:

- (a) El dominio de g .

Solution. Notice that G_g is a translation of G_f by 5 units right and 1 unit up. Hence,

$$D_g = \{6, 7, 8\}.$$

- (b) La gráfica G_g de la función g .

Solution.

$$G_g = \{(6, 2), (7, 3), (8, 6)\}.$$

8. Halle una ecuación para el círculo con centro $(4, 6)$ si pasa por el punto medio de $(4, 6)$ y $(8, -6)$.

Solution. Sea $P = (4, 6)$ y $Q = (8, -6)$ Sea M el punto medio de P y Q

$$M = \left(\frac{4+8}{2}, \frac{6+(-6)}{2} \right) = (6, 0).$$

The circle has radius

$$r = d(P, M) = \sqrt{(4-6)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{40}.$$

An equation for the circle of radius $\sqrt{40}$ and center $(4, 6)$ is

$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 40.$$

9. Considere la parábola definida por la ecuación $y = x^2 - 6x - 13$. Halle:

(a) El vértice y el eje de simetría.

Solution.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x - 13 \\ \iff y &= (x - 3)^2 - 3^2 - 13 \\ y &= (x - 3)^2 - 22. \end{aligned}$$

(b) El foco, la directriz.

Solution.

$$\text{Focus: } (0, \frac{1}{4}) + (3, -22) = (3, -\frac{87}{4})$$

$$\text{Directrix: } y = -\frac{89}{4}$$

10. Demuestre que $x^2 - x + 1 \geq 3/4$.

Solution.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &\geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

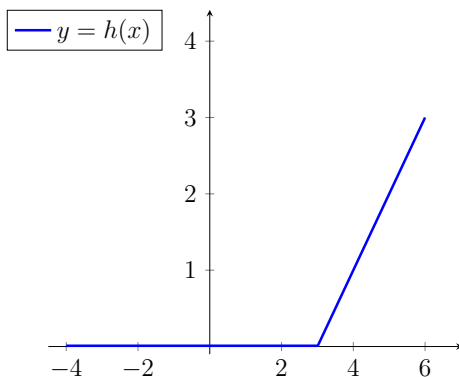
11. Sea $a \in \mathbb{R}$. Suponga que

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0, \\ 0 & \text{if } a < 0. \end{cases}$$

Dibuje en el plano Cartesiano, la gráfica de la función $h(x) = (x - 3)^+$.

Solution.

$$h(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{if } x \geq 3, \\ 0 & \text{if } x < 3 \end{cases}$$



12. La función α definida por

$$\alpha(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

convierte grados Celcius C a grados Farenheit F .

- (a) Halle una fórmula para $\alpha^{-1}(F)$.
- (b) Verifique que $\alpha(\alpha^{-1}(F)) = F$.
- (c) Halle el punto C tal que $\alpha(C) = C$.

Solution.

(a)

$$\begin{aligned} F = \frac{9}{5}C + 32 &\iff F - 32 = \frac{9}{5}C \\ &\iff C = \frac{5}{9}(F - 32). \end{aligned}$$

Hence,

$$\alpha^{-1}(F) = \frac{5}{9}(F - 32).$$

(b)

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha^{-1}(F)) &= \frac{9}{5} \left(\frac{5}{9}(F - 32) \right) + 32 \\ &= F. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \alpha(C) = C &\iff \frac{9}{5}C + 32 = C \\ &\iff \frac{4}{5}C = -32 \\ &\iff C = -40 \end{aligned}$$

Hence $-40^\circ F = -40^\circ C$.